

La théorie mathématique de la viabilité au service de la gestion durable

Une vision différente de l'économie

Isabelle Alvarez

INRAE - LISC
ISC-PIF - PERSIST

Petit rappel historique

Aubin J.-P, *Viability Theory*, Birkhauser, 1991

- Nombreux développements en mathématiques appliquées
 - Théorie du contrôle, Correspondances, jeux dynamiques, ..., EDS
 - Systèmes continus, discrets, viabilité garantie, stochastique
- Nombreuses communautés de modélisateurs
 - Climat, finance, robotique, élevage, dynamique des populations, tourisme, environnement, gestion des ressources renouvelables (forêt, pêche, eau, etc.)

Petit rappel historique (suite)

Aubin J.-P, Bayen A., Saint-Pierre P. *Viability Theory, new directions*, 2011

Nombreuses applications, en particulier dans le domaine de la gestion des ressources renouvelables : plus de 80 exemples dans la revue de Oubraham, A. and Zaccour, G. (2018).

Oubraham, A. and Zaccour, G. (2018) A Survey of Applications of Viability Theory to the Sustainable Exploitation of Renewable Resources. *Ecological Economics*, 145:346–367

Plan

- Un exemple de problème de viabilité : l'eutrophisation des lacs
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- Algorithmes
- Conclusion

L'eutrophisation des lacs

Accumulation de nutriments dans les lacs : phosphore (et azote)



@ S.
Martin

Lac oligotrophe :

- Eau claire et saine
- Biodiversité élevée

Lac eutrophe :

- Eau turbide
- Eau putride et toxique (bloom bactérien)
- Diminution de l'oxygène dissout
- Perte de biodiversité (étouffement d'espèce, développement d'algues)

Dynamique du Phosphore dans les lacs

Nombreux travaux de l'OCDE : recueil de données, analyses, indicateurs

Vollenweider et al (1982). Eutrophication of waters.

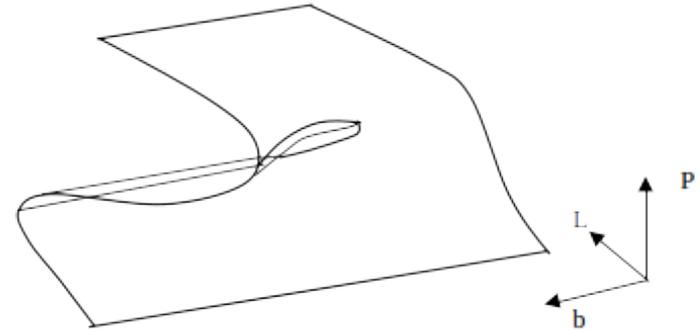
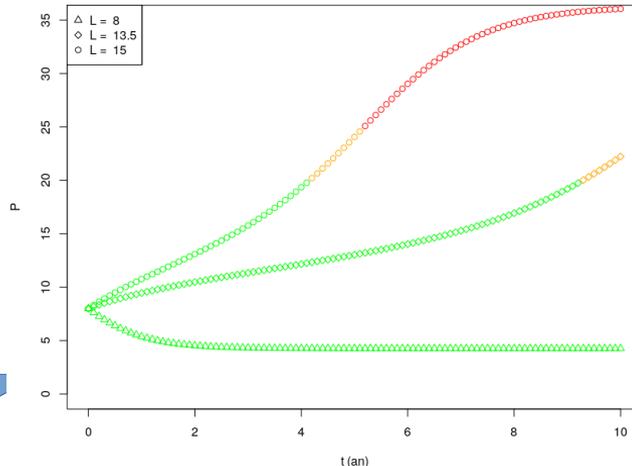
Monitoring, assessment and control. Technical report, OECD

Nombreux travaux de modélisation

S. R. Carpenter, D. Ludwig, and W. A. Brock, 'Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change', *Ecological Applications*, 9, 751–771, (1999)

$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \underset{\text{recyclage depuis les alluvions}}{}$$

P(t) converge vers un attracteur qui se trouve sur une fronce



Dynamique du Phosphore dans les lacs

Nombreux travaux de l'OCDE : recueil de données, analyses, indicateurs

Vollenweider et al (1982). Eutrophication of waters.

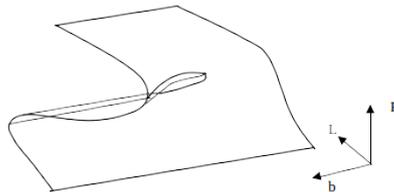
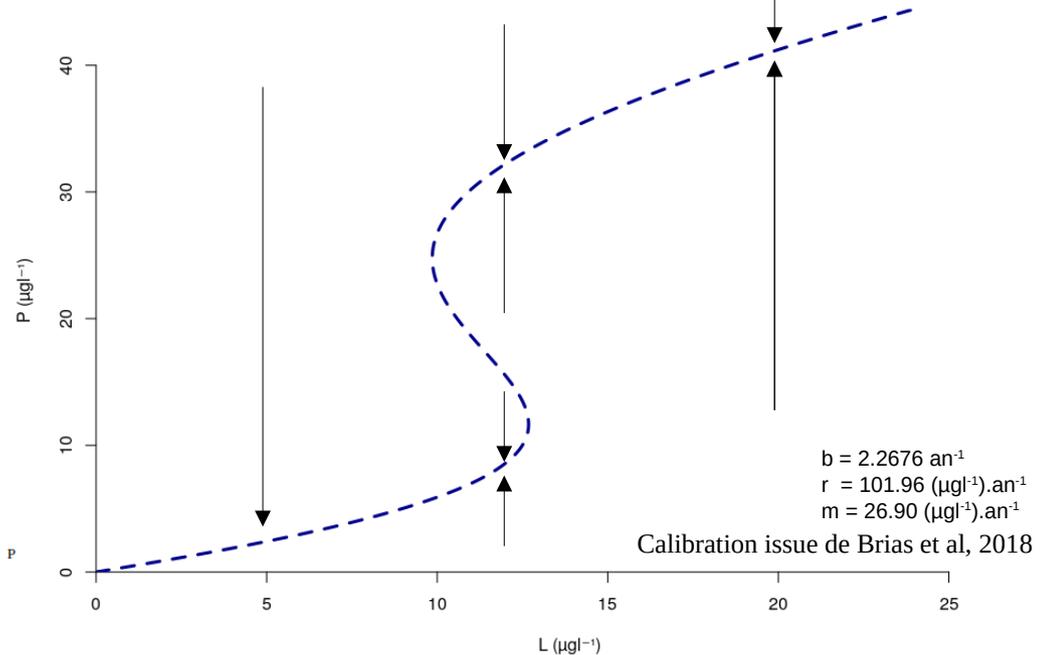
Monitoring, assessment and control. Technical report, OECD

Nombreux travaux de modélisation

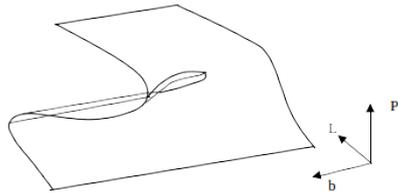
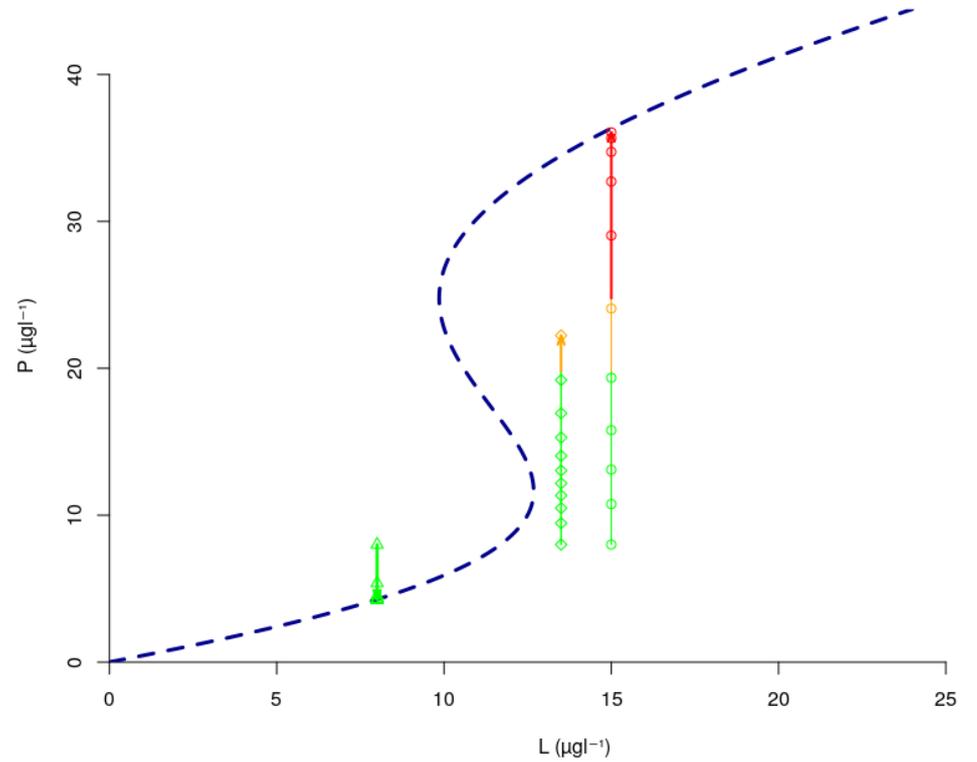
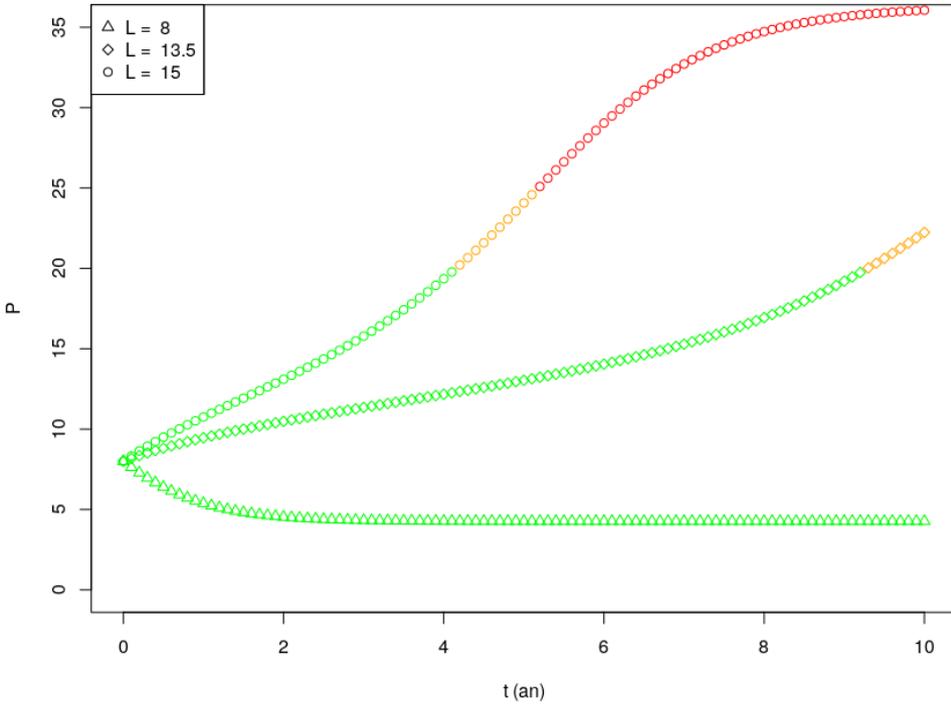
S. R. Carpenter, D. Ludwig, and W. A. Brock, 'Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change', *Ecological Applications*, 9, 751–771, (1999)

$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

recyclage depuis les alluvions



Dynamique du Phosphore dans les lacs



Dynamique du Phosphore dans les lacs

Nombreux travaux de l'OCDE : recueil de données, analyses, indicateurs

Vollenweider et al (1982). Eutrophication of waters.

Monitoring, assessment and control. Technical report, OECD

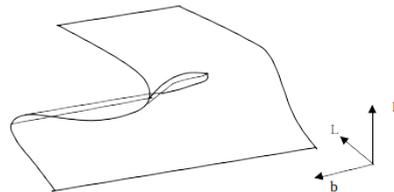
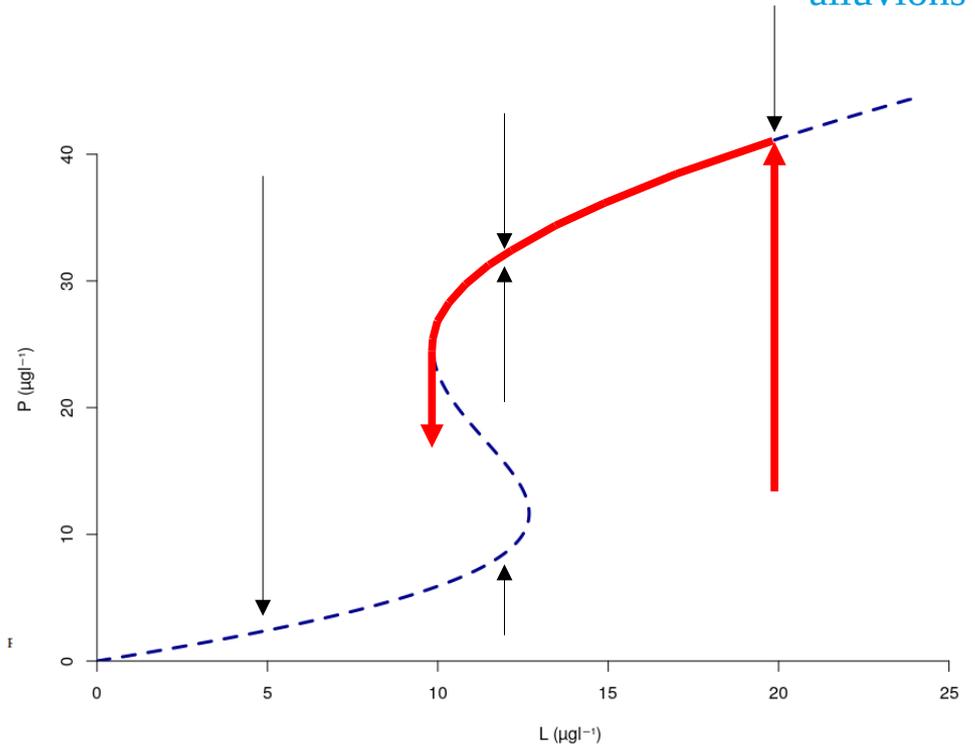
Nombreux travaux de modélisation

S. R. Carpenter, D. Ludwig, and W. A. Brock, 'Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change', *Ecological Applications*, 9, 751–771, (1999)

Cela entraîne des comportements d'hystérésis

$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

recyclage depuis les alluvions



Dynamique du Phosphore dans les lacs

Nombreux travaux de l'OCDE : recueil de données, analyses, indicateurs

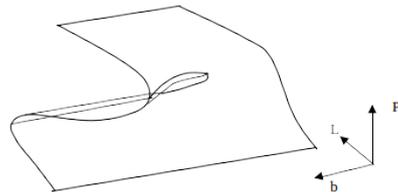
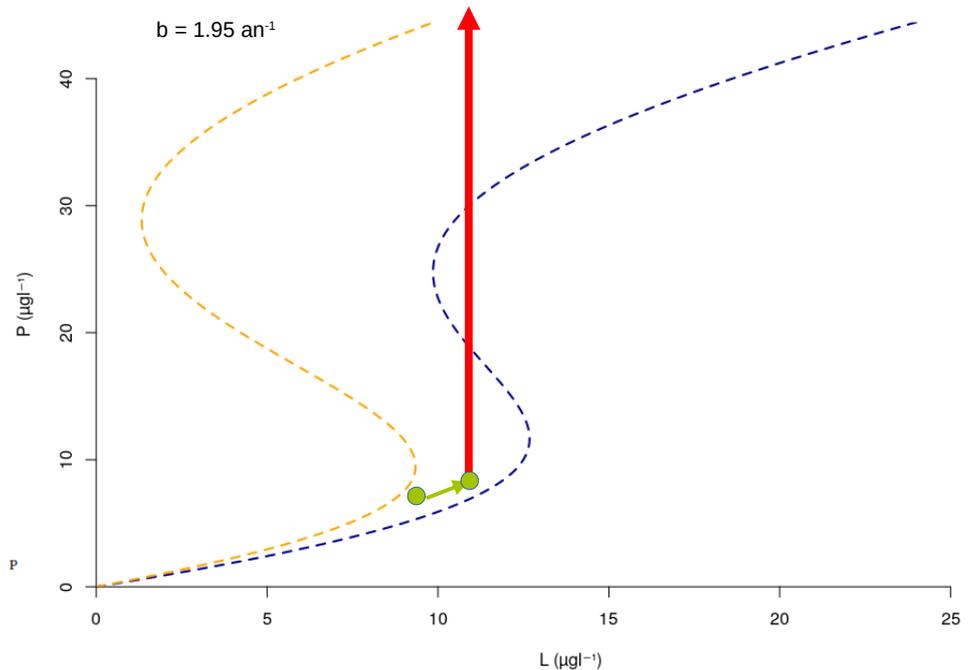
Vollenweider et al (1982). Eutrophication of waters. Monitoring, assessment and control. Technical report, OECD

Nombreux travaux de modélisation

S. R. Carpenter, D. Ludwig, and W. A. Brock, 'Management of eutrophication for lakes subject to potentially irreversible change', *Ecological Applications*, 9, 751-771, (1999)

Cela entraîne des comportements d'hystérésis

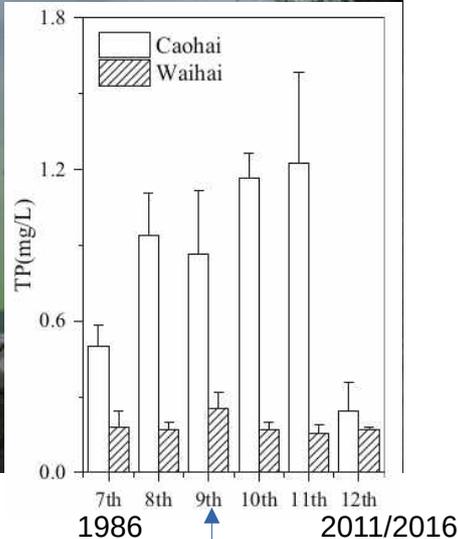
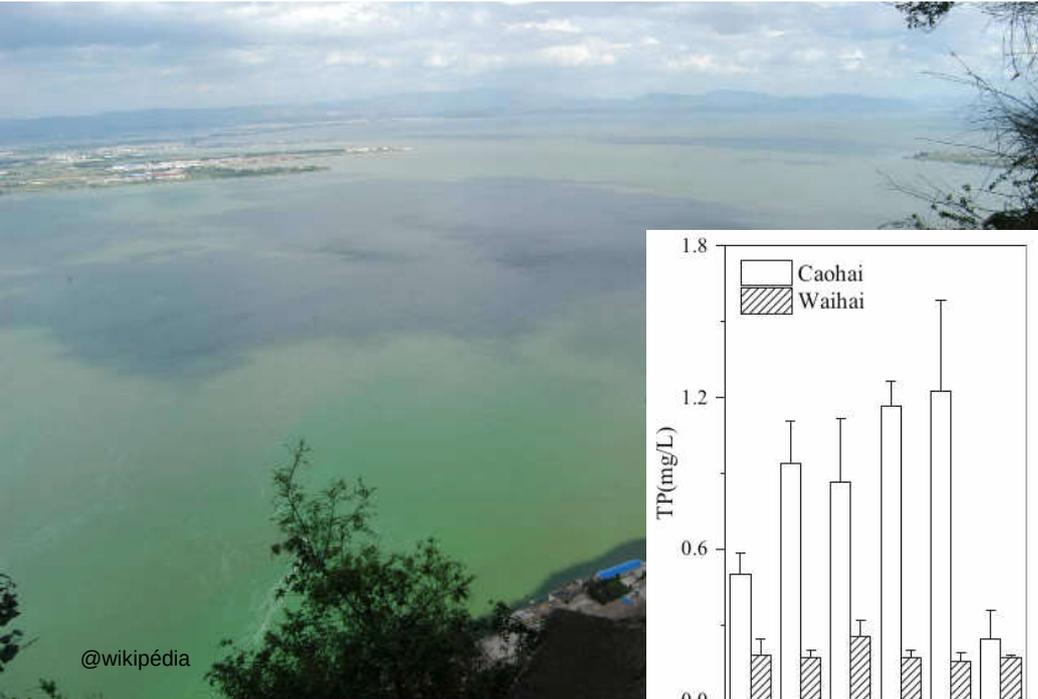
$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \underset{\text{recyclage depuis les alluvions}}{}$$





Water pollution characteristics of Dianchi Lake and the course of protection and pollution management

Wenbin Liu · Shengrui Wang · Li Zhang ·
Zhaokui Ni



@wikipédia

Moyens d'action

Suppression des sources de pollutions ponctuelles

- Épuration des eaux usées de Kunming
- Fermeture des mines de potasse et des activités industrielles polluantes
- Relocalisation des industries agroalimentaires 5,2 millions de volailles déplacées, interdiction de l'aquaculture

Suppression des sources de pollutions diffuses

- Restriction d'utilisation des engrais
- Interdiction des cultures florales et maraîchères sur un large périmètre et en ville

Dragage (4,3 millions de m³ de sédiments)

Apport d'eau saine (détournement de rivières)

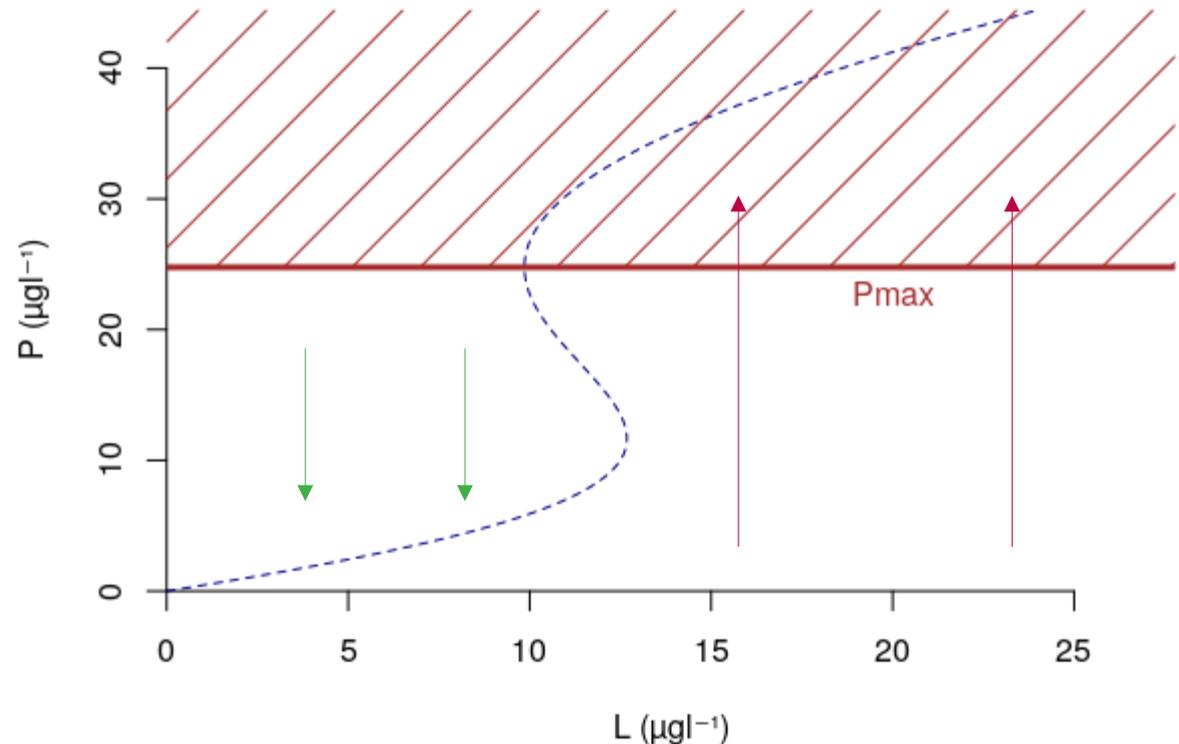
Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Définir l'ensemble des états souhaitables

- Valeur maximum pour la concentration de Phosphore Total



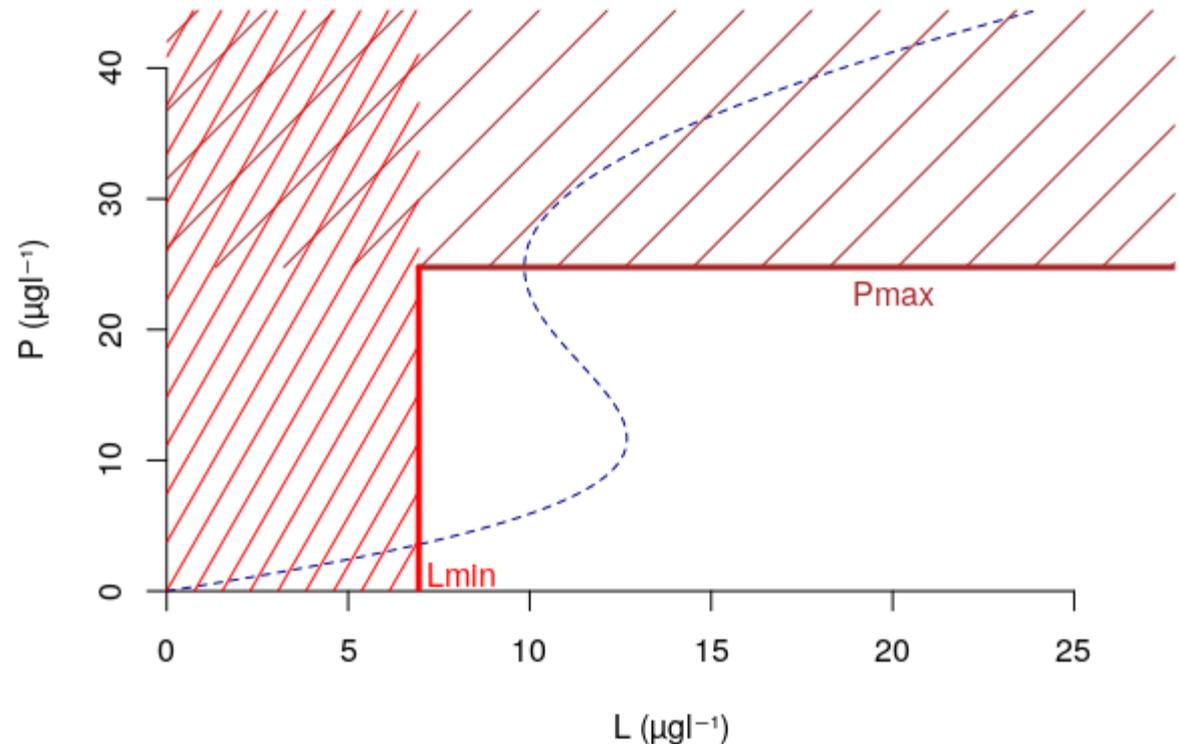
Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Définir l'ensemble des états souhaitables

- Valeur maximum pour la concentration de Phosphore Total
- Valeur minimum d'apports de Phosphore pour l'activité agricole



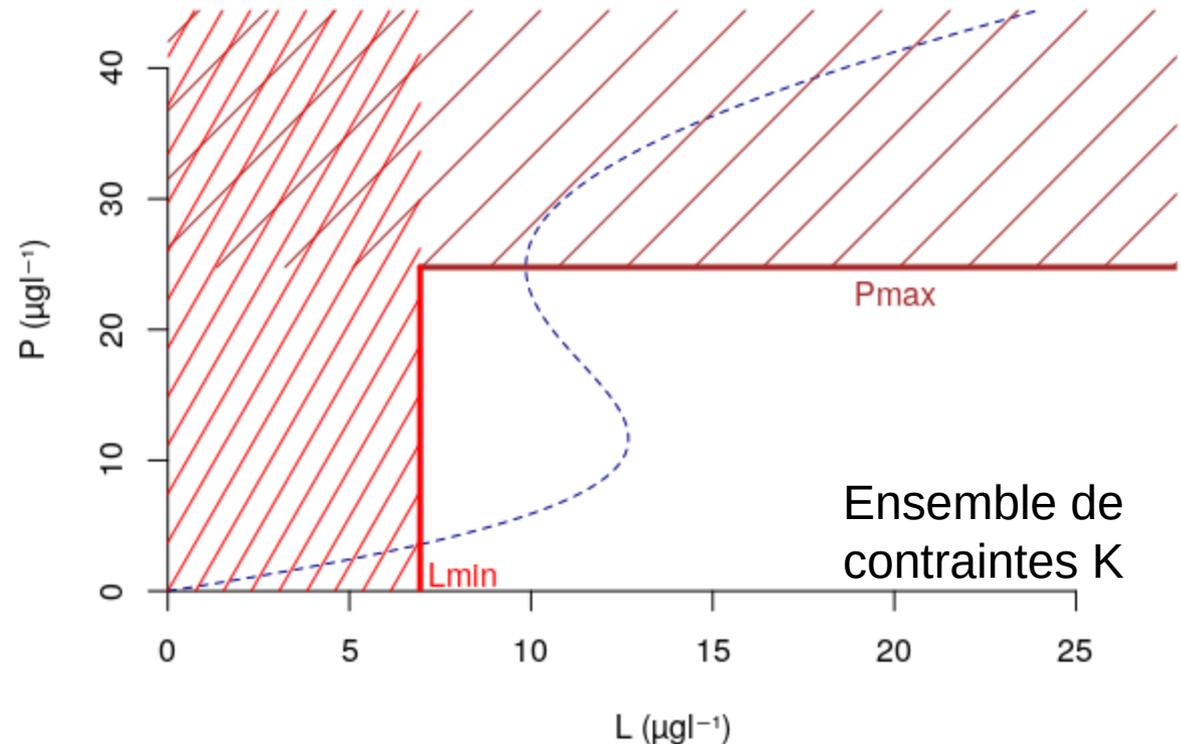
Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Définir l'ensemble des états souhaitables

- Valeur maximum pour la concentration de Phosphore Total
- Valeur minimum d'apports de Phosphore pour l'activité agricole



Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Poser le problème :

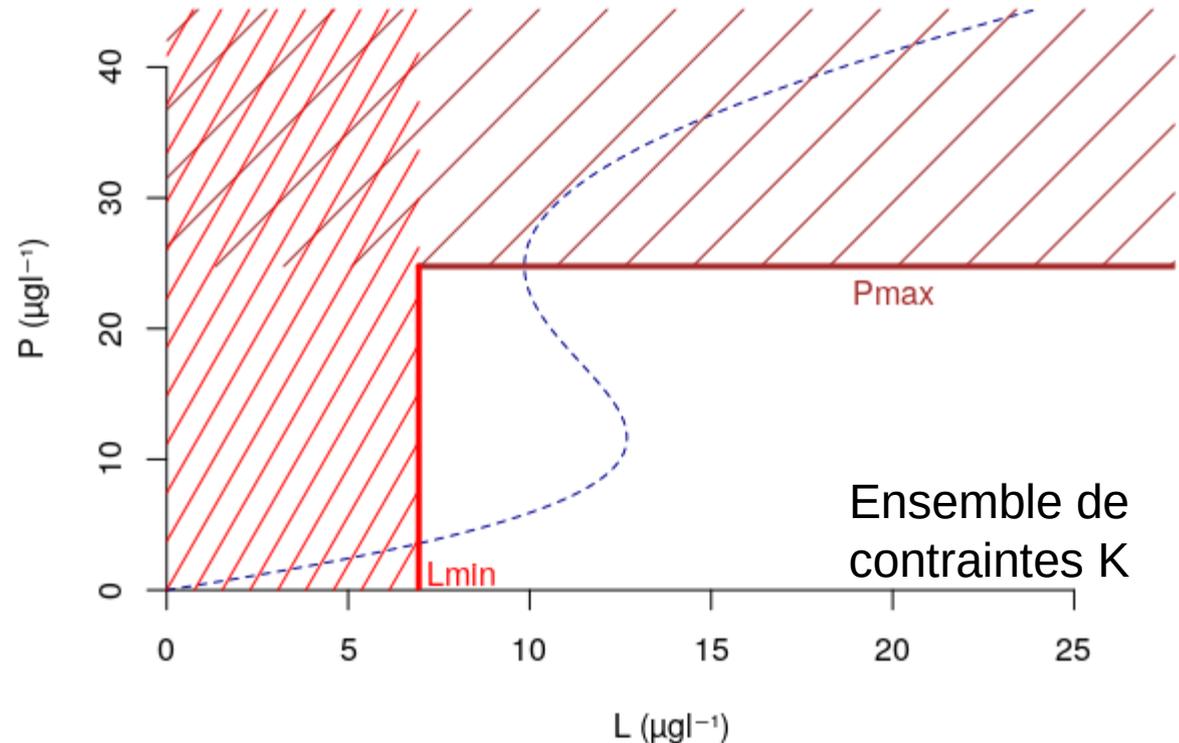
- Définir l'ensemble des états souhaitables
- Définir les moyens d'action admissibles
- Connaître la dynamique

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$ dans $[u_{\min}, u_{\max}]$

(L, P) dans K



Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

Poser le problème

Calculer le noyau de viabilité

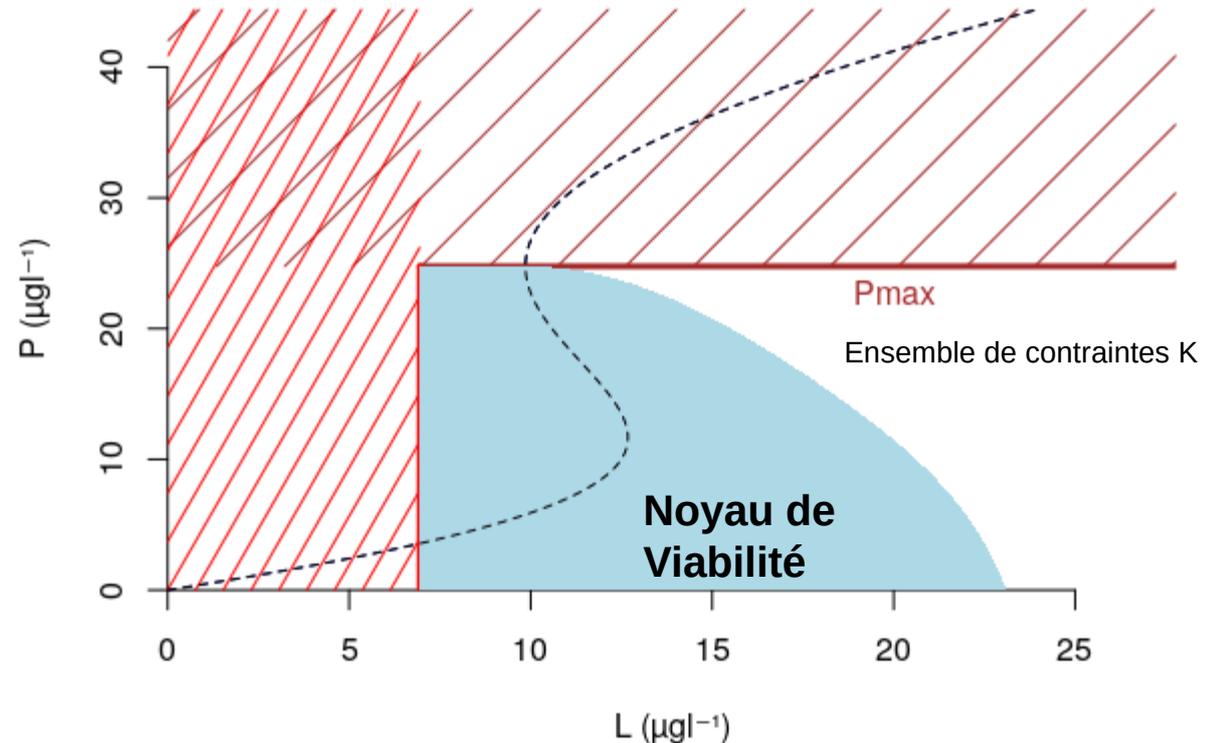
- Définir l'ensemble des états souhaitables
- Définir les moyens d'action admissibles
- Connaître la dynamique

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$ dans $[u_{\min}, u_{\max}]$

(L, P) dans K



Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

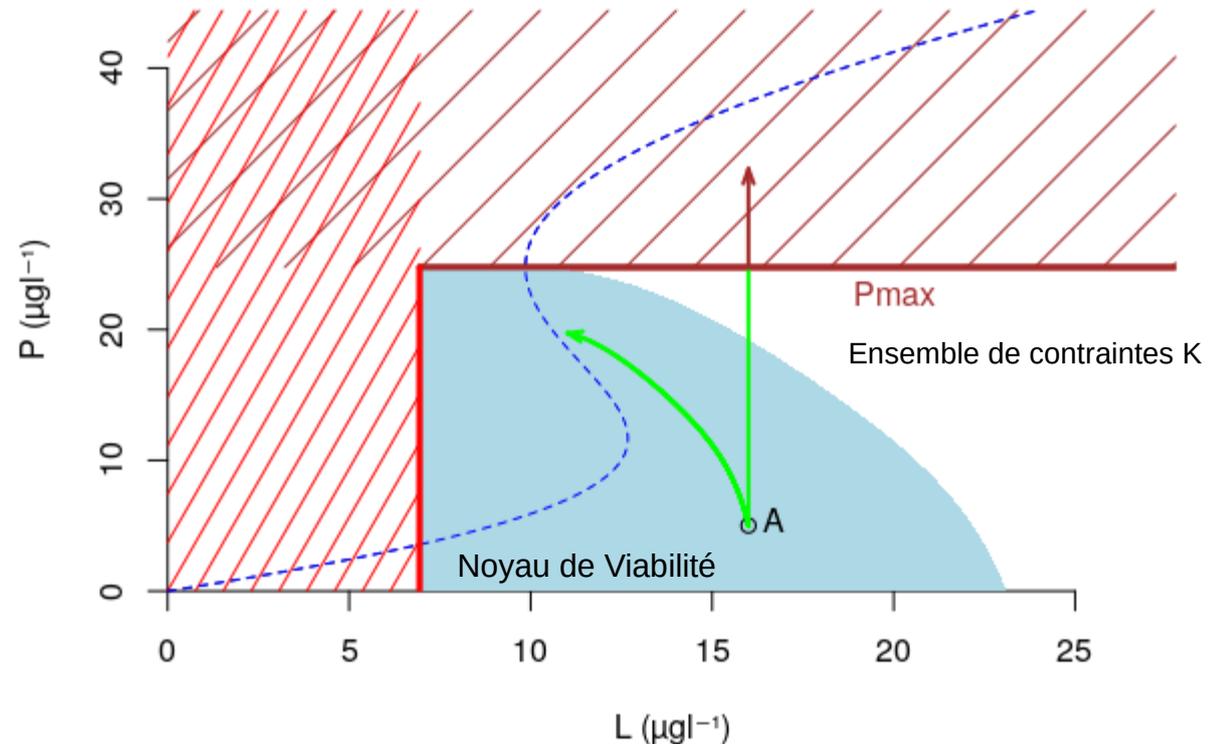
- Définir l'ensemble des états souhaitables
- Définir les moyens d'action admissibles
- Connaître la dynamique

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$ dans $[u_{\min}, u_{\max}]$

(L, P) dans K



Le point de vue de la viabilité sur le lac et les exploitations riveraines

Sophie Martin, (2004)

Comment concilier la poursuite de l'activité agricole et conserver un lac oligotrophe ?

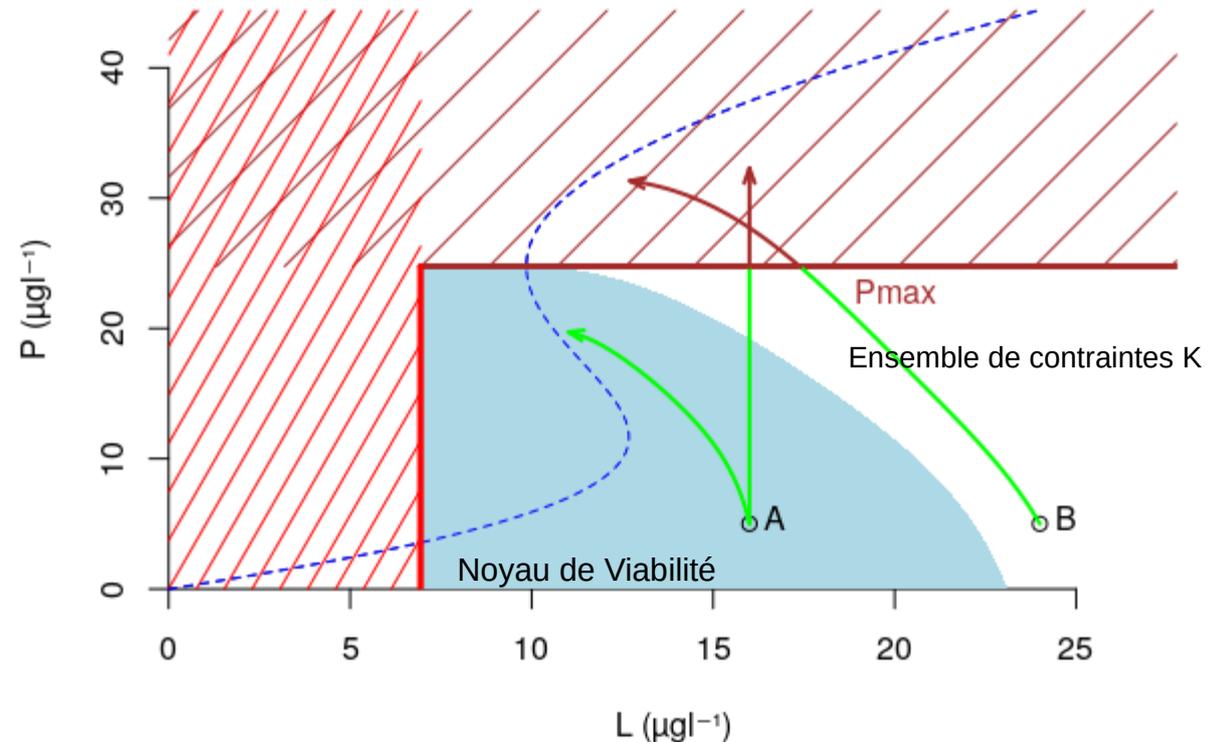
- Définir l'ensemble des états souhaitables
- Définir les moyens d'action admissibles
- Connaître la dynamique

$$\frac{dP}{dt}(t) = -b.P(t) + L(t) + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)}$$

$$\frac{dL}{dt}(t) = u(t)$$

$u(t)$ dans $[u_{\min}, u_{\max}]$

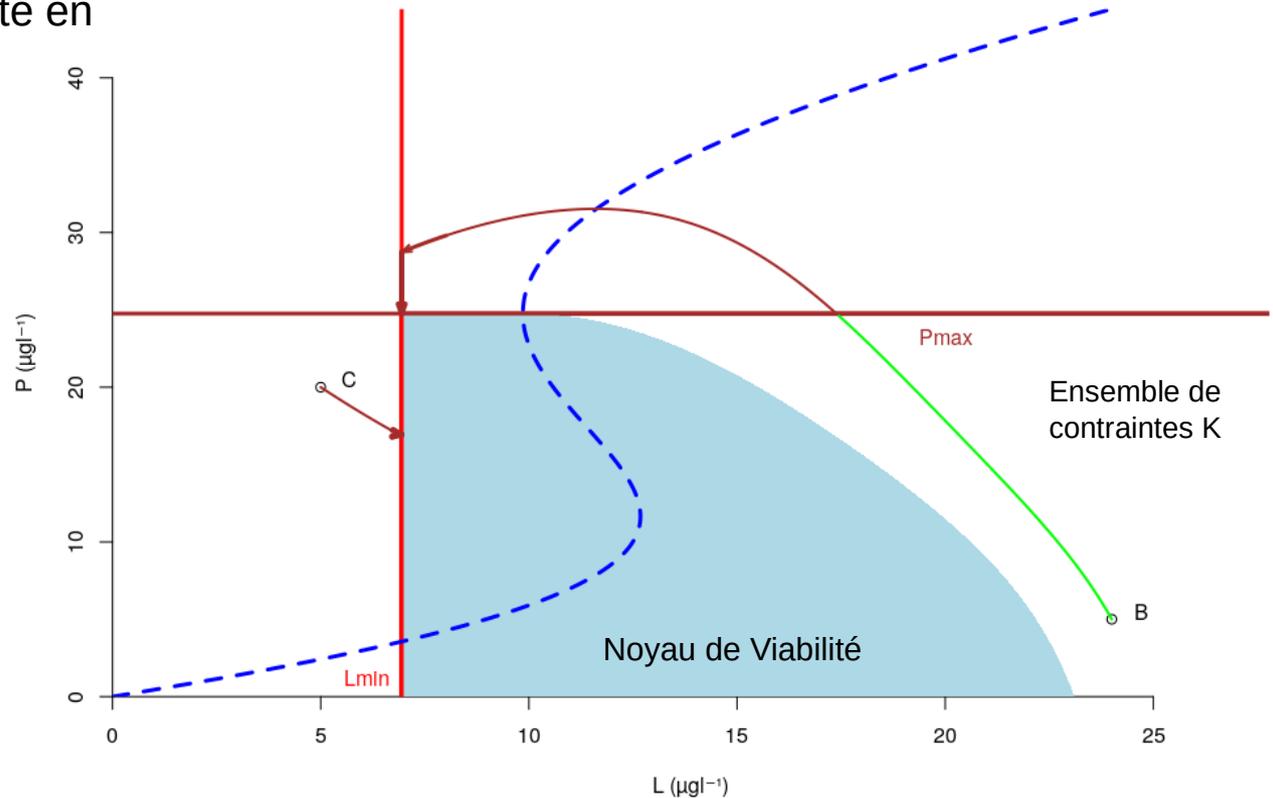
(L, P) dans K



Viabilité du lac et des exploitations riveraines

Comment rétablir le compromis s'il est perdu ?

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de rejoindre le noyau de viabilité en temps fini est son bassin de capture.



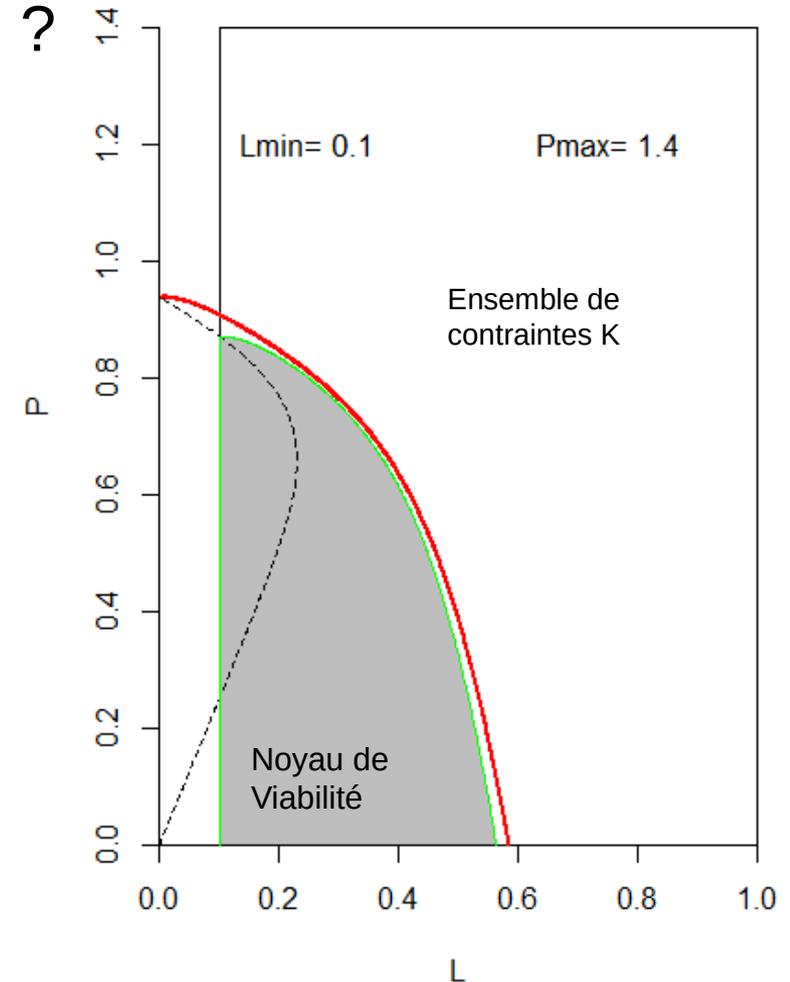
Viabilité du lac et des exploitations riveraines

Comment rétablir le compromis s'il est perdu ?

L'ensemble des états à partir desquels il est possible de rejoindre le noyau de viabilité en temps fini est son bassin de capture.

Dans le cas d'un lac irréversible, le bassin de capture peut être très petit.

Si une perturbation fait sortir du noyau de viabilité, il est possible que le lac ne redevienne jamais oligotrophe.



Plan

- Un exemple de problème de viabilité : l'eutrophisation des lacs
- **Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité**
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- Algorithmes
- Conclusion

Le noyau de viabilité

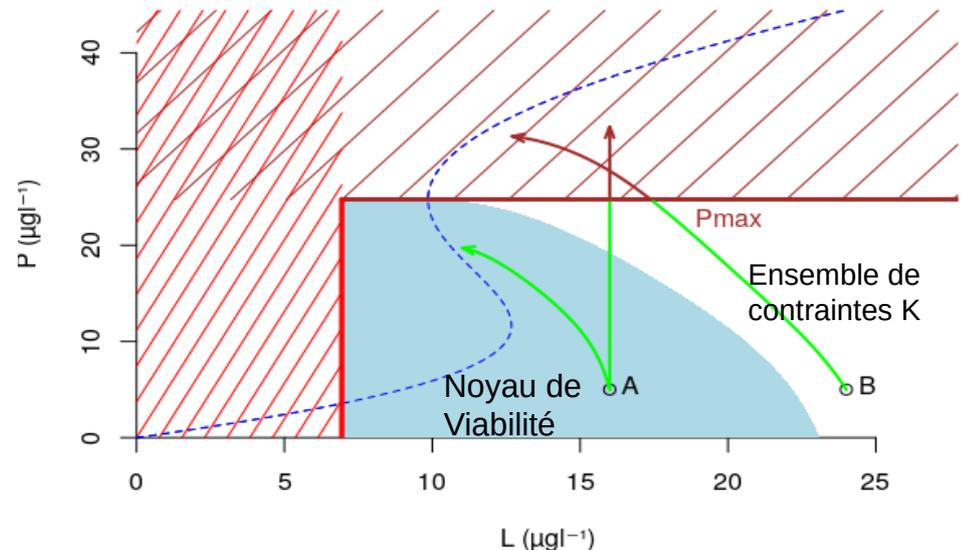
S : système dynamique continu ou discret
S(x₀) : ensemble des évolutions gouvernées
par S qui partent de x₀

$$S_c \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \text{ pour } t \geq 0 \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases}$$

$$Viab_{c,f,U}(K) = \{x_0 \in K \mid \exists x(\cdot) \in S_c(x_0) \text{ telle que } \forall t \geq 0, x(t) \in K\}$$

Fermeture du noyau de viabilité (Aubin, 1991)

- K fermé
- (f,U) est tel que :
 - Le graphe de U, {(x,u) | x dans X, u dans U(x)} est fermé
 - f est continue
 - f et U ont des croissances linéaires :
 - ||F(x)|| ≤ c(||x||+1)
 - L'image de chaque état {f(x,u), u dans U(x)} est convexe



Le noyau de viabilité

S : système dynamique continu ou discret
 $S(x_0)$: ensemble des évolutions gouvernées
par S qui partent de x_0

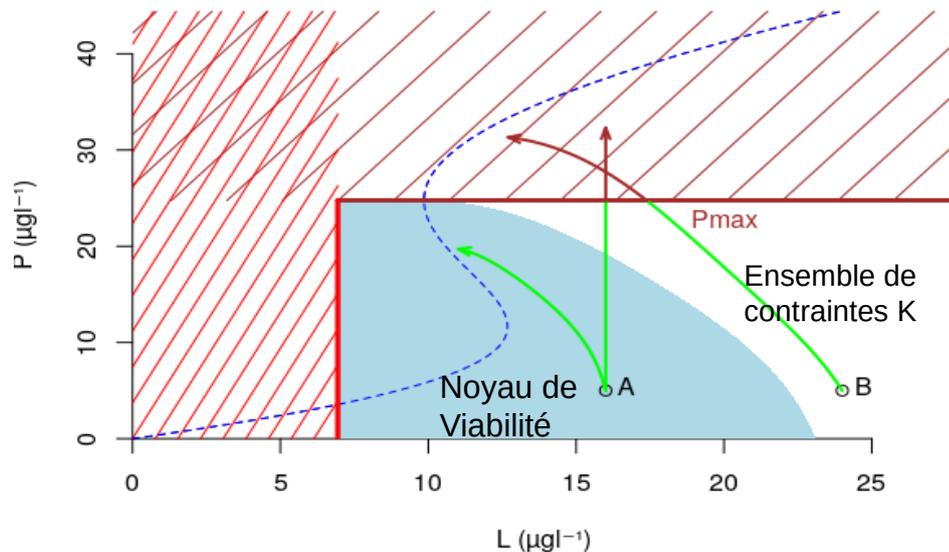
$$S_d \begin{cases} x^{n+1} = f(x^n, u^n) \text{ pour } n \in \mathbb{N} \\ u^n \in U(x^n) \end{cases}$$

$$Viab_{d,f,U}(K) = \{x_0 \in K \mid \exists (x^n)_{n \in \mathbb{N}} \in S_d(x_0) \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, x^n \in K\}$$

Fermeture du noyau de viabilité cas discret

(Lavallée, 2020)

- K fermé
- Le graphe de U , $\{(x,u), x \text{ dans } X, u \text{ dans } U(x)\}$ est fermé
- f est continue
- U est à croissance linéaire : $\|U(x)\| \leq c(\|x\|+1)$



Le bassin de capture

S : système dynamique continu ou discret

$S(x)$: ensemble des évolutions gouvernées par S qui partent de x

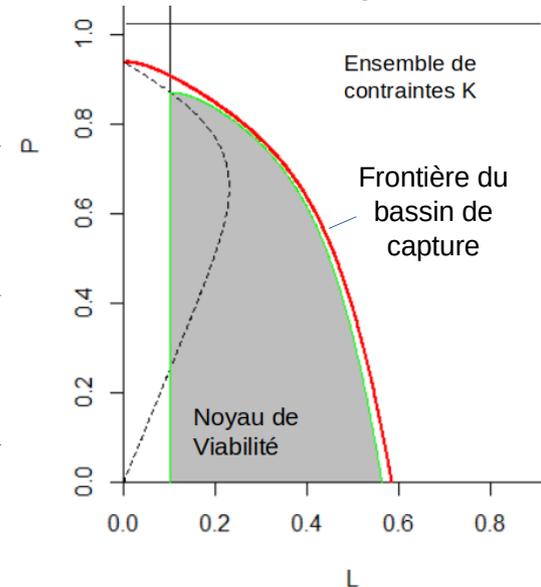
C : cible à atteindre en temps fini

$$S_c \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \text{ pour } t \geq 0 \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases}$$

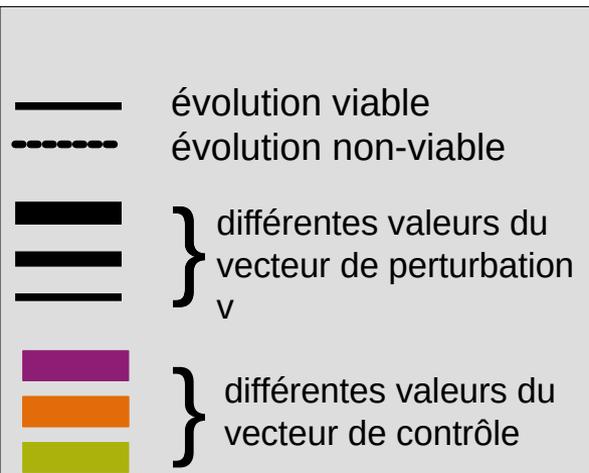
$$Capt_{c,f,U}(K, C) = \left\{ x \in K \mid \exists x(\cdot) \in S_c(x), \exists t^* \geq 0 \begin{cases} x(t^*) \in C \\ \forall t \in [0, t^*], x(t) \in K \end{cases} \right\}$$

Bassin de capture du noyau de viabilité :

- Dans un ensemble plus large
- Avec des moyens d'action éventuellement différents



Gestion ensembliste des incertitudes



Propriété de viabilité garantie : ensemble d'états pour lequel il existe une régulation pour laquelle toutes les évolutions restent dans l'ensemble de contraintes (pour toutes les perturbations admissibles)

$$Svc(f, U, V) \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t), v(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \\ v(t) \in V(x(t)) \end{cases}$$

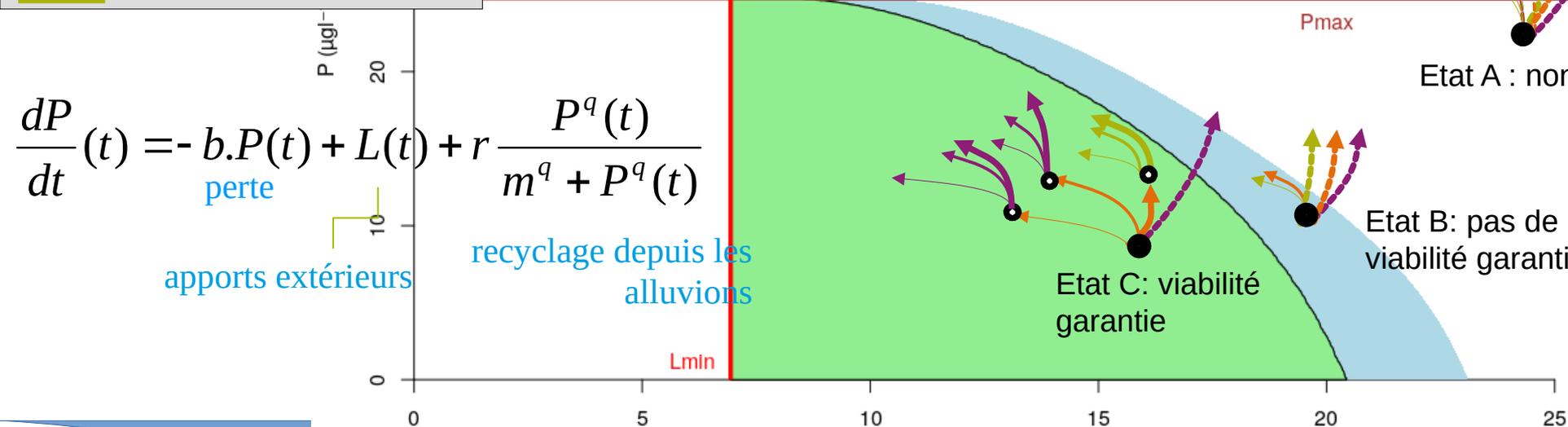


Etat A : non viable

Pmax

Etat B: pas de viabilité garanti

Etat C: viabilité garantie



Sous certaines conditions, le noyau de viabilité garantie est fermé (Aubin, 1997; Doyen, 2000, Lavalée, 2020)

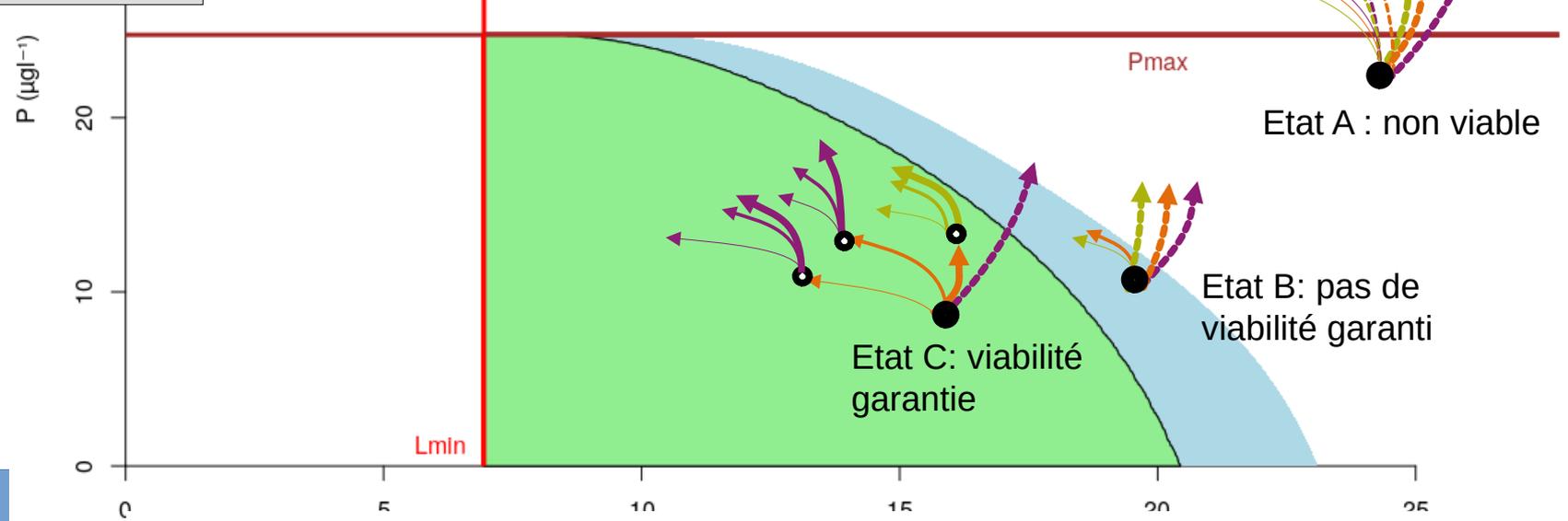
Gestion ensembliste des incertitudes

Propriété de viabilité garantie : ensemble d'états pour lequel il existe une régulation pour laquelle toutes les évolutions restent dans l'ensemble de contraintes (pour toutes les perturbations admissibles)

- évolution viable
- - - évolution non-viable
- } différentes valeurs du vecteur de perturbation v
- } différentes valeurs du vecteur de contrôle

$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underset{\text{perte}}{b.P(t)} + \underset{\text{apports extérieurs}}{L(t)} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \underset{\text{recyclage depuis les alluvions}}{}$$

$$v=(b,r,m,q)$$



Sous certaines conditions, le noyau de viabilité garantie est fermé (Aubin, 1997; Doyen, 2000, Lavalée, 2020)

Viabilité stochastique : gestion probabiliste des incertitudes

Système discret : $x(t+1)=G(x(t),u(t),w(t))$ avec t de 0 à T , $w(\cdot) \in \Omega$ une trajectoire de vecteurs d'incertitude, avec une distribution de probabilité sur Oméga

$$\Omega_{\hat{c}, t_0, x_0} = \left\{ \omega(\cdot) \in \Omega \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ x(t+1) = G(t, x(t), c(t), \omega(t)) \\ c(t) = \hat{c}(t, x(t)) \\ \mathcal{I}_k(t, x(t), c(t)) \geq \tau_k, k = 1, \dots, K \\ t = t_0, \dots, T \end{array} \right. \right\}$$

V. Martinet, J. Peña-Torres, M. De Lara, H. Ramírez. (2016) Risk and Sustainability: Assessing Fishery Management Strategies Environ Resource Econ 64:683–707

Ensemble des scénarios viables (qui respectent les contraintes sur les indicateurs à chaque pas de temps)

Cela permet de définir la probabilité de viabilité d'une stratégie de gestion

$$\Pi(\hat{c}, \tau_1, \dots, \tau_K) = \mathbb{P} \left\{ \omega(\cdot) \in \Omega \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ x(t+1) = G(t, x(t), c(t), \omega(t)) \\ c(t) = \hat{c}(t, x(t)) \\ \mathcal{I}_k(t, x(t), c(t)) \geq \tau_k, k = 1, \dots, K \\ t = t_0, \dots, T \end{array} \right. \right\}$$

D'autres références :

Doyen L., De Lara M., (2010), Stochastic viability and dynamic programming, Systems and Control Letters. 59, 10, 629-634.

C Rougé, JD Mathias, G Deffuant. (2014). Relevance of control theory to design and maintenance problems in time-variant reliability: The case of stochastic viability. Reliability Engineering & System Safety 132, pp.250-260.

Alais, J.-C., Carpentier, P., and De Lara, M. (2017). Multi-usage hydropower single dam management: chance-constrained optimization and stochastic viability. Energy Systems, 8(1):7–30

Plan

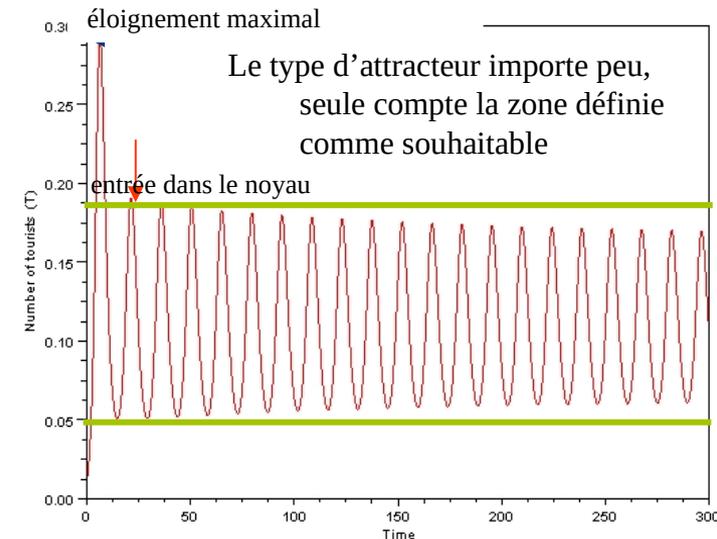
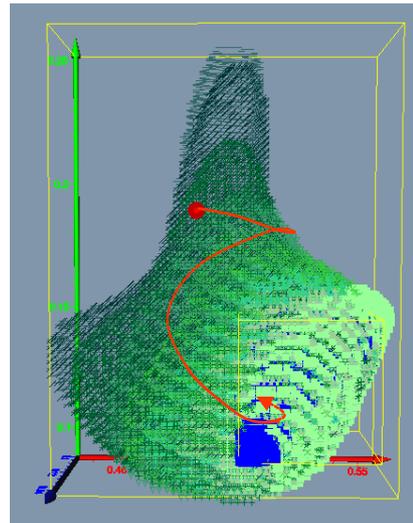
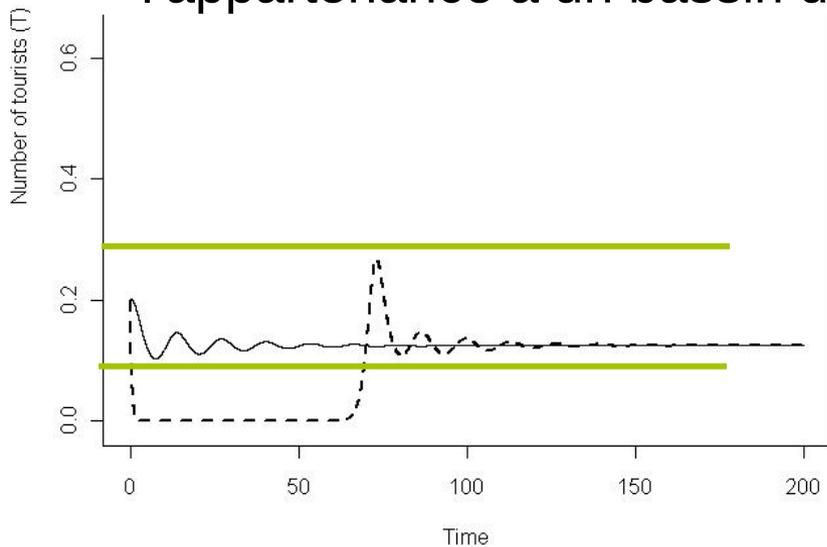
- Un exemple de problème de viabilité : l'eutrophisation des lacs
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- **Liens avec les concepts associés à la durabilité**
- Algorithmes
- Conclusion

Viabilité et durabilité

Faire évoluer un système dans un ensemble viable c'est éviter le compromis court terme / long terme

- Les contraintes sont satisfaites en tout temps
- Les comportements transitoires sont pris en compte
- On ne privilégie pas le comportement asymptotique ou l'appartenance à un bassin d'attraction

Wei, W., Alvarez, I., and Martin, S. (2013). Sustainability analysis: Viability concepts to consider transient and asymptotical dynamics in socio-ecological tourism-based systems. *Ecological Modelling*, 251:103–113



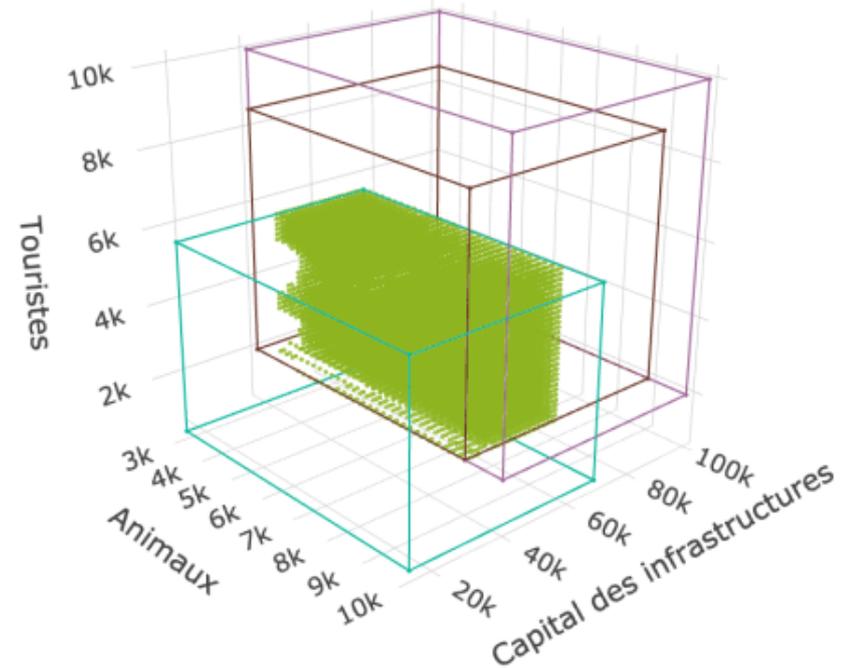
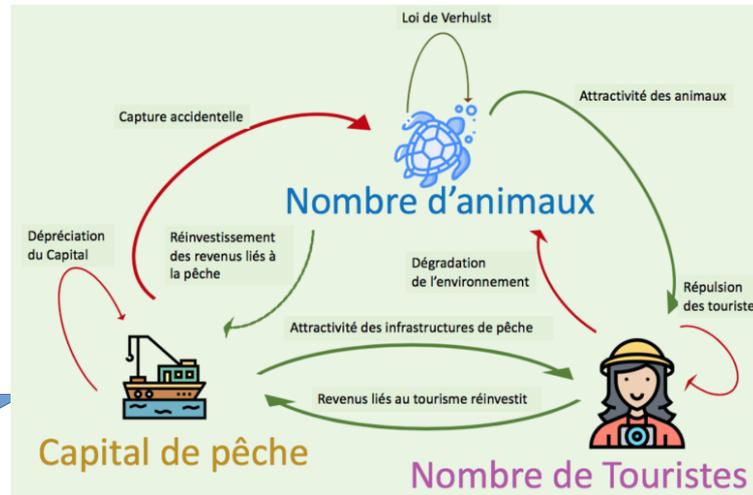
Viabilité et durabilité

Faire évoluer un système dans un ensemble viable c'est prendre en compte les contraintes des acteurs

- Les contraintes portent sur les variables d'état du système
- On ne privilégie pas un point de vue par rapport à un autre

Exemple : activités dans un territoire protégé
(réserve extractiviste au Brésil)

Zaleski, L. (2020). PhD thesis.
Decision and negotiation assistant
by viability analysis: Application
to the participatory management
of protected areas. Sorbonne
University. In French



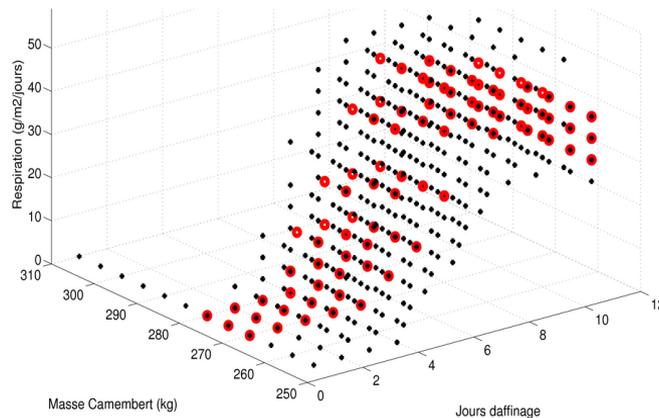
Viabilité et innovation

Résoudre un problème de viabilité c'est calculer un ensemble de possible à partir duquel on peut se poser de nouvelles questions

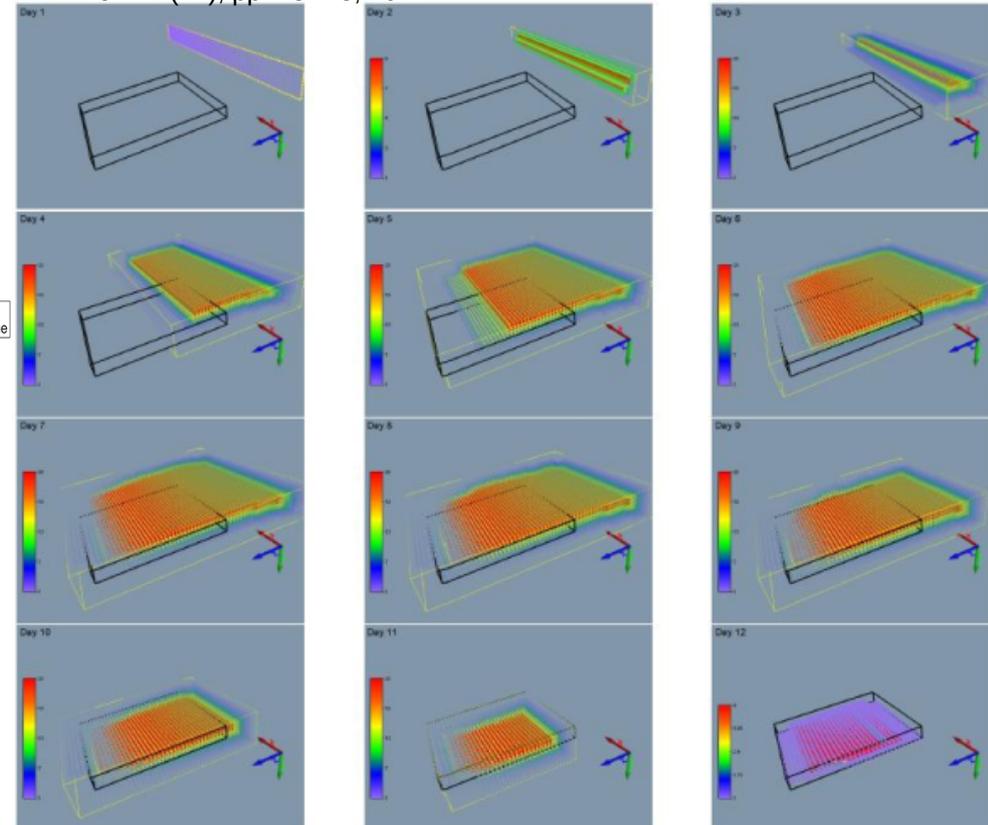
- Avec la garantie que les contraintes de viabilité seront satisfaites
- On peut intégrer de nouveaux points de vue

Exemple : affinage du camembert

Calcul du tube de viabilité du camembert
(capture d'une cible en 12 jours)

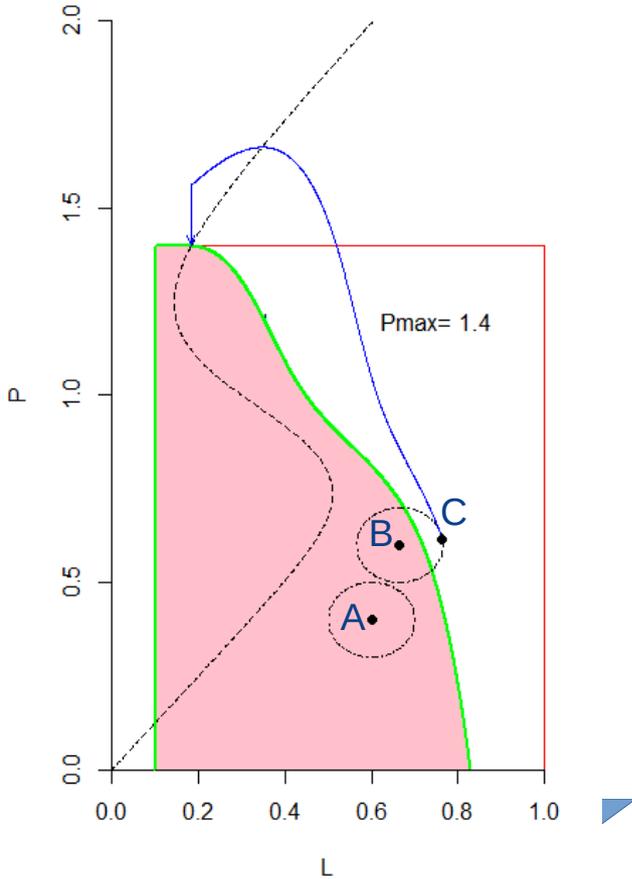


Mesmoudi et al, Coupling geometric analysis and viability theory for system exploration. Application to a food living system". Journal of Process Control, vol. 24 (12), pp. 18--28, 2014



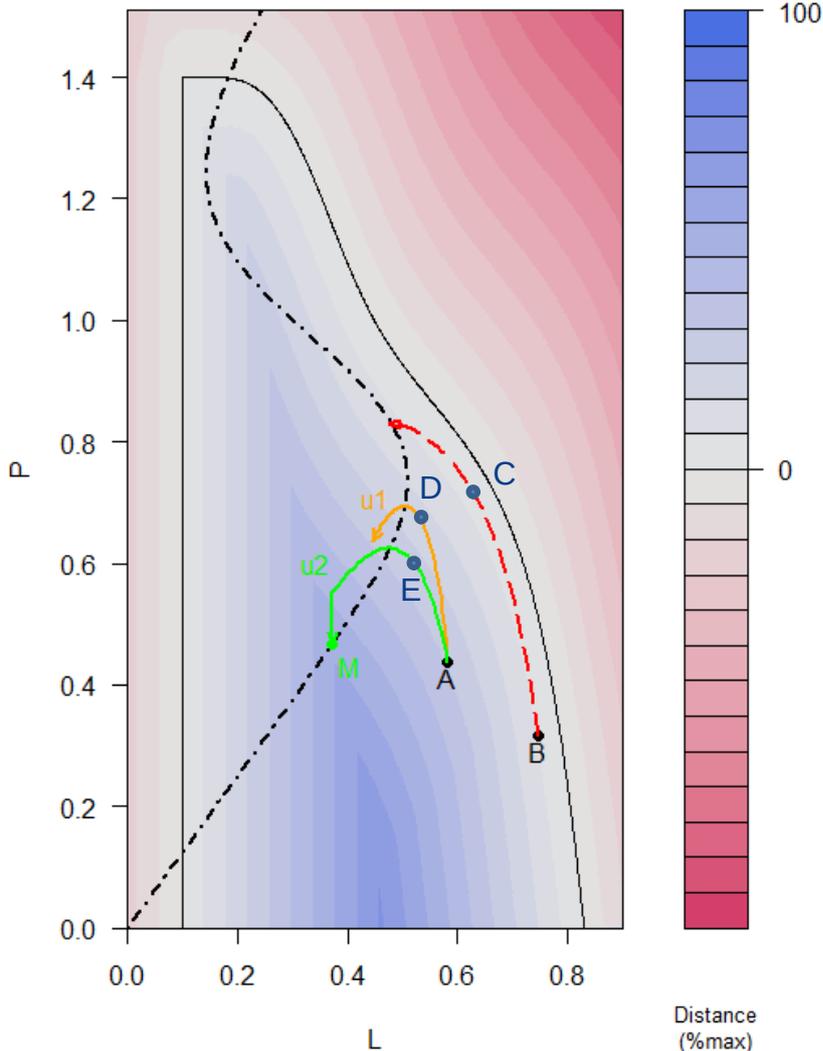
Viabilité et robustesse

Conserver la propriété souhaitée face à de nouvelles perturbations : un indicateur dans le noyau de viabilité



- La situation de deux points dans le noyau de viabilité peut être très différente face à des perturbations qui n'ont pas été prises en compte dans le modèle
- La robustesse va permettre de mesurer cette différence de situation
- Robustesse à des perturbations dans l'espace d'état

Viabilité et robustesse



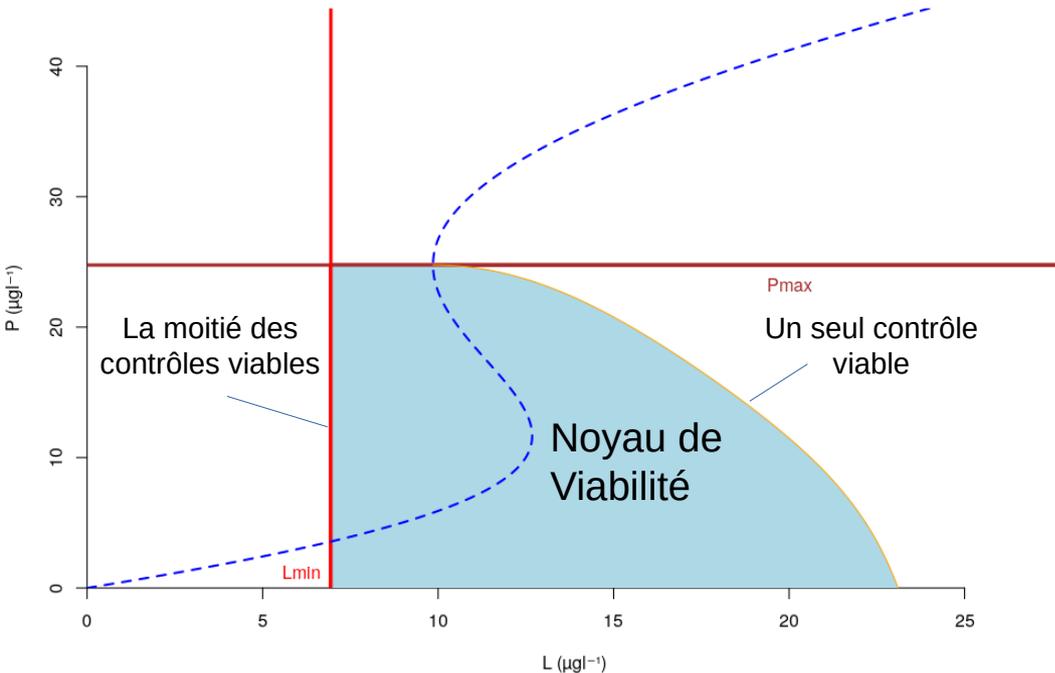
Conserver la propriété souhaitée face à de nouvelles perturbations ou incertitudes dans l'espace d'état

- La robustesse en un état peut être définie comme la borne supérieure de la robustesse de toutes les évolutions issues de cet état, la robustesse d'une évolution étant la taille maximale de la perturbation qui peut être supportée le long de l'évolution sans quitter le noyau de viabilité
- A partir du noyau de viabilité il est possible de construire des trajectoires à robustesse croissante

Viabilité et flexibilité

Conserver la propriété souhaitée face à aux incertitudes : un indicateur dans le noyau de viabilité

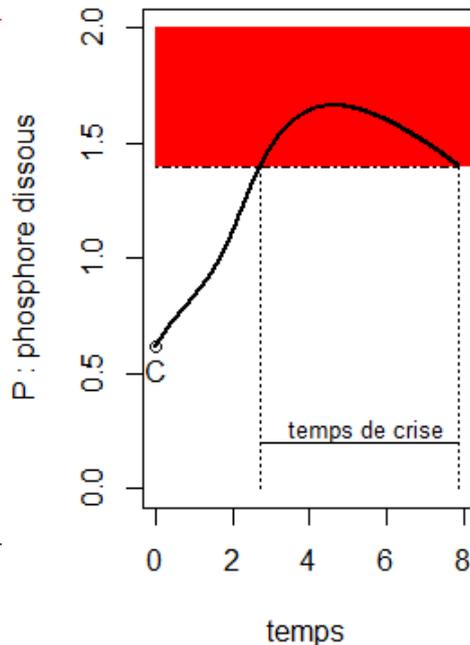
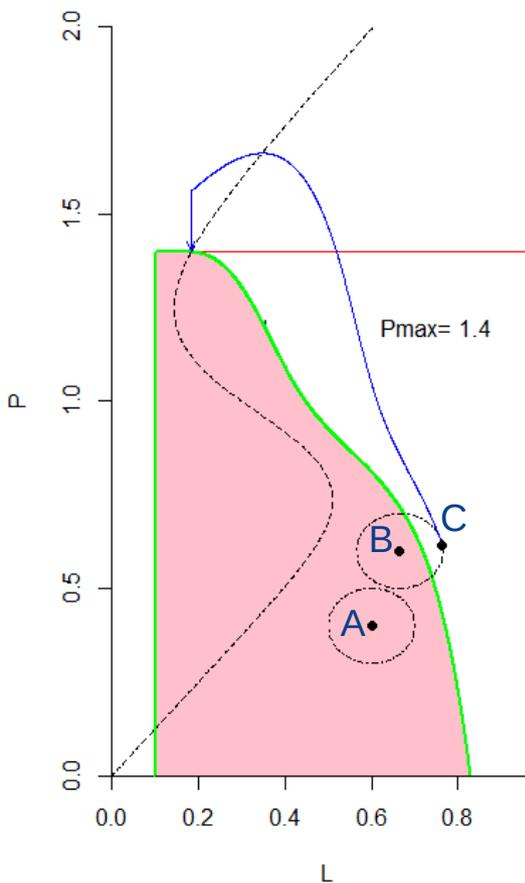
- Flexibilité : Indicateur fondé sur la capacité de contrôle
- Part des contrôles viables parmi les contrôles admissibles
- Définition plus riche dans les systèmes discrets



R. Sabatier, L.G. Oates, and R.D. Jackson. (2015) Management flexibility of a grassland agroecosystem: A modeling approach based on viability theory. *Agricultural Systems*, 139:76 – 81, 2015
Sabatier, R., Doyen, L., Tichit, M. (2012). Action versus result-oriented schemes in a grassland agroecosystem: a dynamic modelling approach. *PLOS ONE*, 7 (4). DOI:10.1371/pone.0033257

Viabilité et résilience

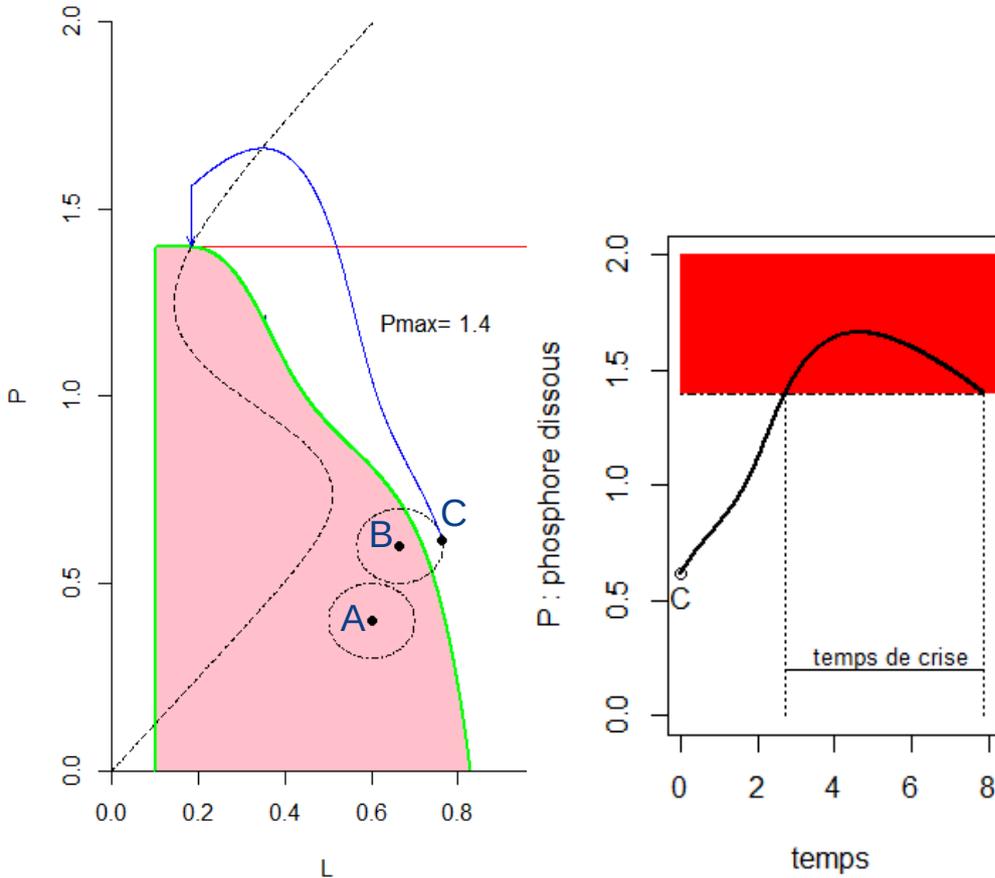
Est-il possible de rétablir la propriété souhaitée ? Oui dans le bassin de capture



- La résilience est nulle hors du bassin de capture
- La résilience est infinie pour les états du noyau de viabilité que la perturbation maximale ne fait pas sortir du noyau
- Utilisation du temps de crise

Viabilité et résilience

Est-il possible de rétablir la propriété souhaitée ? Oui dans le bassin de capture



➤ Indicateur de résilience quand la propriété peut être perdue face à de nouvelles perturbations

➤ Utilisation du temps de crise

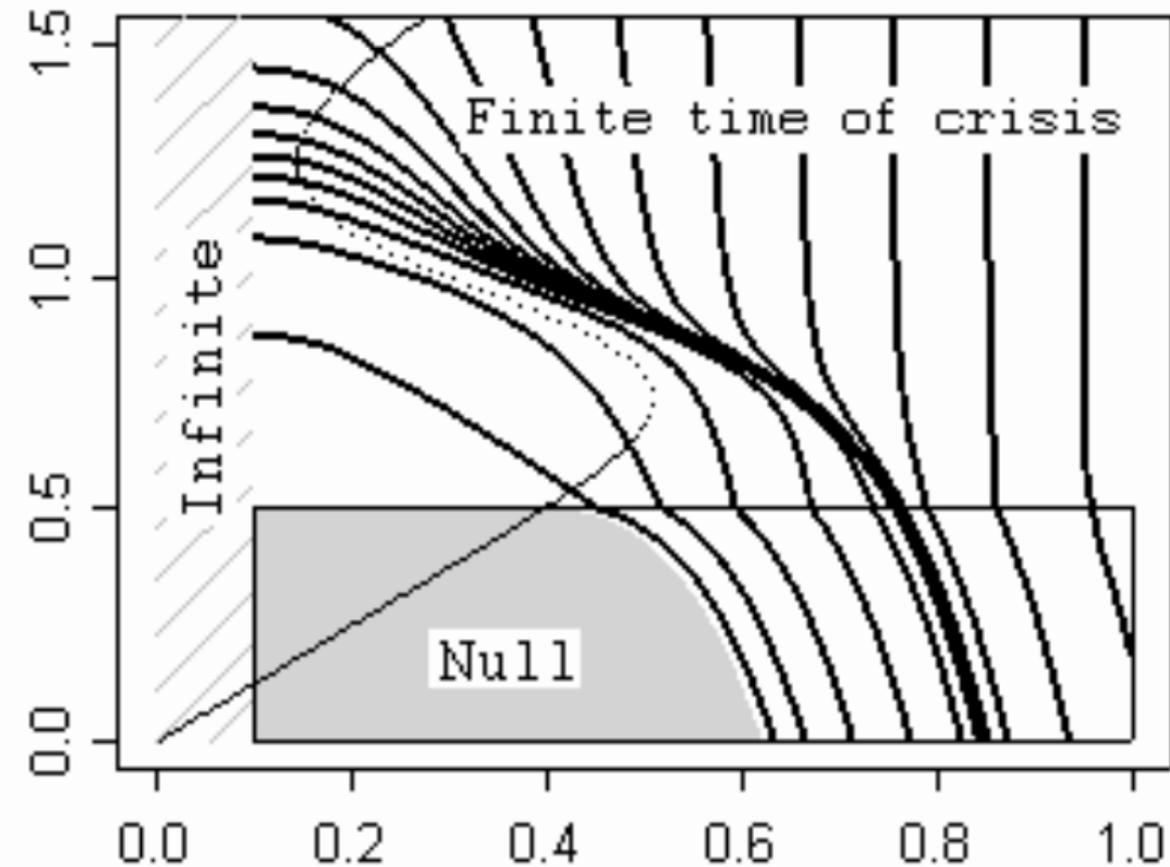
Trajectoire qui minimise le temps de crise :

$$u(t) = u_{\min} \text{ si } L(t) > L_{\min}$$

$$u(t) = 0 \text{ si } L(t) = L_{\min}$$

La résilience est définie comme l'inverse du coût associé au temps de crise

Viabilité et résilience



Courbes de niveau du temps de crise en respectant la contrainte $L \geq L_{min}$

A partir de

- la carte de niveaux
- la taille des perturbations envisagées $D(x)$
- la durée maximale de restauration admissible
- les coûts associés aux zones, au contrôle, au temps de crise

- Il est possible de définir la résilience comme l'inverse du coût de restauration associé au temps de crise

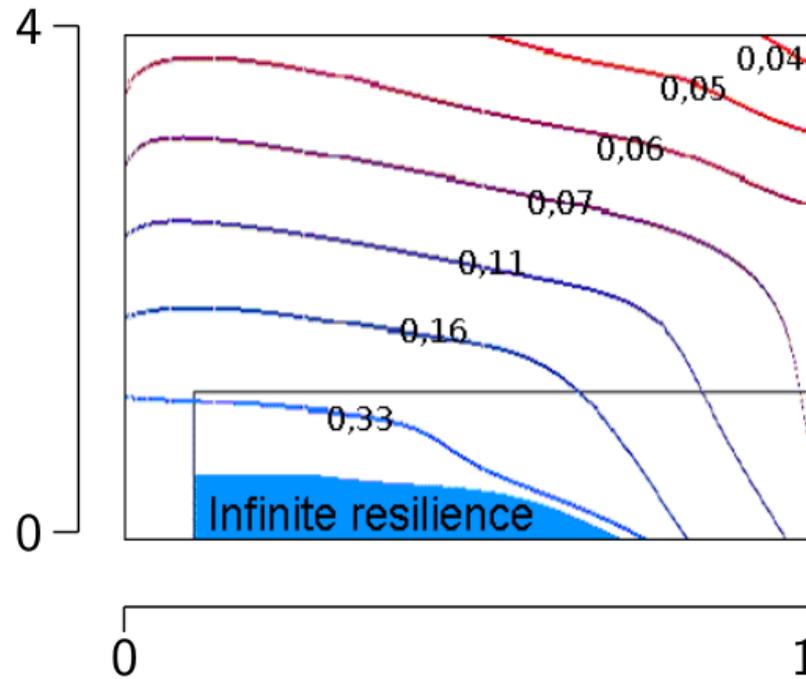
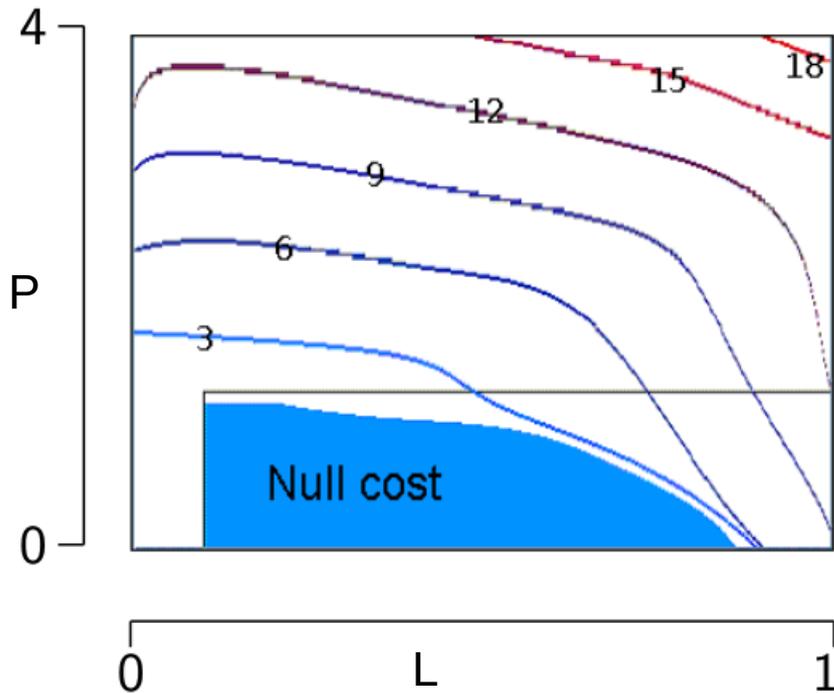
$$R(x) := \frac{1}{\max_{x_1 \in D(x)} c(x_1)}$$

$$R(x) = \frac{1}{\max_{x_1 \in D(x)} \min_{x_1(\cdot) \in S(x_1)} \int_0^\infty (1 - I_K(x_1(t))) dt}$$

Martin, S. 2004 : The cost of restoration as a way of defining resilience: a viability approach applied to a model of lake eutrophication. Ecology and Society 9(2): 8

Viabilité et résilience

Perturbation envisagée $D(x) = \{(0,y), y \leq 0.5\}$
Pas de zone privilégiée
Coût proportionnel au temps de crise



Plan

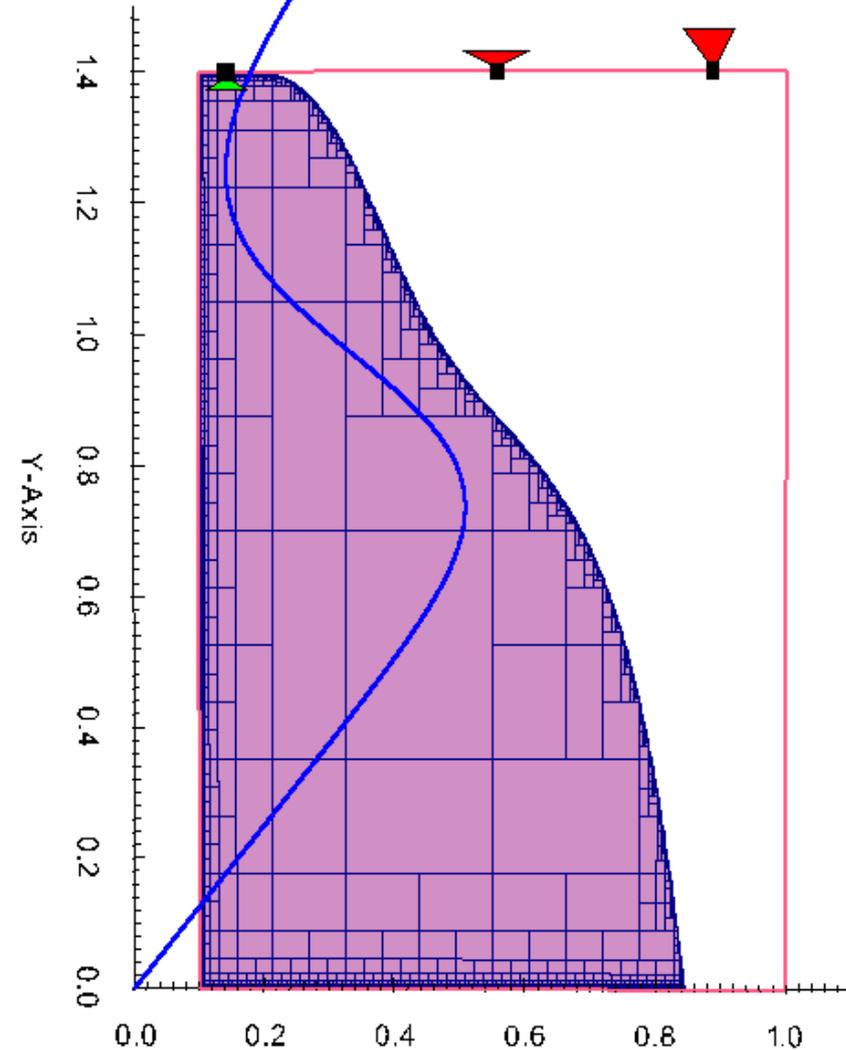
- Un exemple de problème de viabilité : l'eutrophisation des lacs
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- **Algorithmes**
- Conclusion

Algorithmes

- Un algorithme général (cas non-linéaire, temps infini) avec convergence vers le noyau : Saint-Pierre, 1994, Cet algorithme est la base de nombreux autres, tous soumis à la malédiction de la dimensionnalité. Saint-Pierre, P. (1994). Approximation of the viability kernel. *Applied Mathematics and Optimization*, 29(2):187–209
- Plusieurs algorithmes avec convergence dans des cas particuliers: cas linéaire, temps fini, temps et/ou états discrets, etc. (de Lara et Doyen, 2008; Maidens et al, 2013; Brias et al, 2016, ...)
- Quelques algorithmes radicalement différents ou basés sur le calcul de trajectoires (Bokanowsky et al, 2006, Bonneuil, 2006, ...)
- Rares librairies (Vikaasa: Krawczyk et al 2013, sous Matlab en 2019) et codes disponibles (Viablab: Desilles, 2020; Viabilitree: Alvarez et al, 2016)
- Plusieurs tentatives de couplage avec les méthodes d'apprentissage (SVM Deffuant et al, 2006, plus proche voisin Wei et al, 2012, etc.) mais rien de déterminant ...
 - Nouvelles opportunités avec les possibilités du deep learning

S. Bansal and C. J. Tomlin, "DeepReach: A Deep Learning Approach to High-Dimensional Reachability," 2021 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2021, pp. 1817-1824, doi: 10.1109/ICRA48506.2021.9561949.

Algorithmes



Principe de Viabilité
(basé sur l'algorithme de Saint-Pierre)

Saint-Pierre, P. (1994). Approximation of the viability kernel. *Applied Mathematics and Optimization*, 29(2):187–209

Plan

- Un exemple de problème de viabilité : l'eutrophisation des lacs
- Les concepts de la théorie mathématique de la viabilité
- Liens avec les concepts associés à la durabilité
- Algorithmes
- **Conclusion**

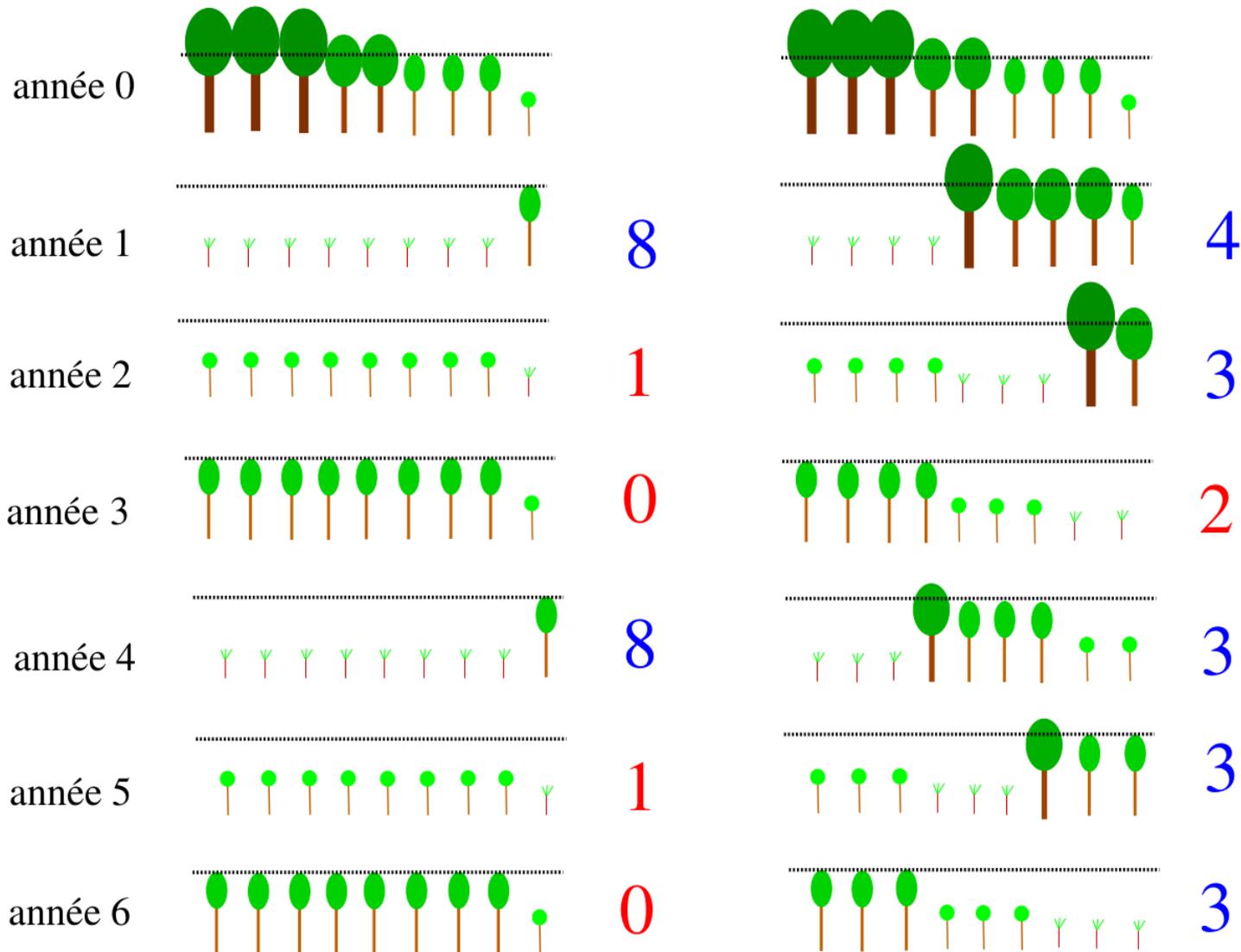
Intérêt de l'approche

- Contraintes à satisfaire en tout temps : équité intergénérationnelle et égalité de traitement des enjeux
- Particulièrement adaptée quand la définition d'une fonction objectif commune est difficile
- Possibilité d'optimisation dans le noyau de viabilité après calcul du noyau : garantie absolue de respect des contraintes

Viabilité vs. Optimisation directe

politique gloutonne

politique soutenable



Merci de votre attention

Bibliographie complémentaire

- En lien avec les approches économiques classiques

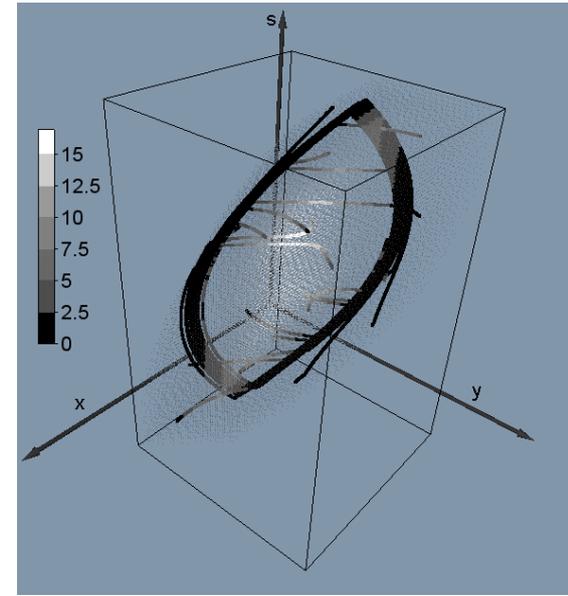
Doyen L., Martinet V., 2012, Maximin, Viability and Sustainability, Journal of Economic Dynamic and Control, 36, 9, 1414–1430.

DeLara M.. & Doyen L., 2008, Sustainable Management of Natural Resources Mathematical Models and Methods, Springer

A. Rapaport, J-P Terreaux, L. Doyen. Viability analysis for the sustainable management of renewable resources. Mathematical and Computer Modelling, Elsevier, 2006, 43 (5-6), pp.466-484. {10.1016/j.mcm.2005.12.014}

Viability challenge #2: Computation of viable feedback

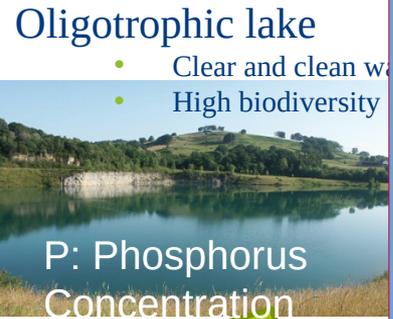
- Viability algorithm computes the viability kernel and gives a subset of the regulation map
- Control strategies have to be computed after the computation of the regulation map
- Actual strategies are not satisfying (Aubin & Frankowska, 1984)
- Control strategies should be as close as possible to the stakeholder's propositions
=> model exploration



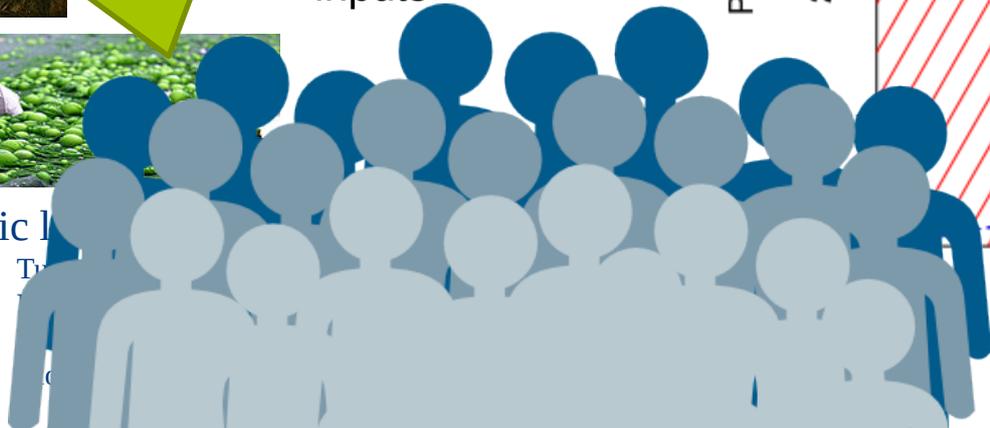
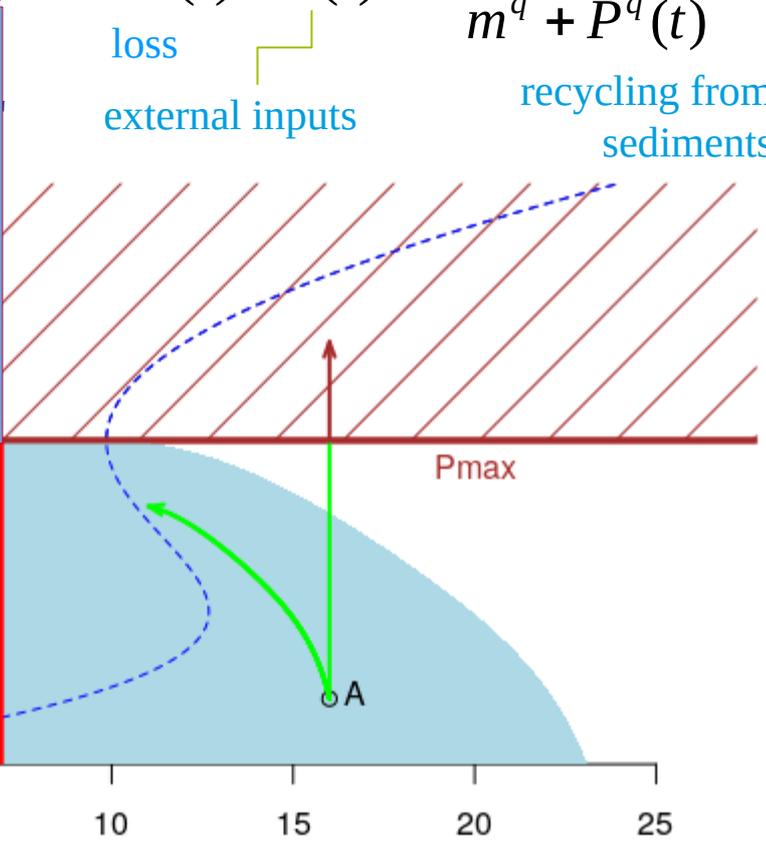
Viability challenge #3: Individual and collective viability

How to ensure continuation of both agricultural activity and oligotrophic lake

$$\frac{dP}{dt}(t) = - \underbrace{b \cdot P(t)}_{\text{loss}} + \underbrace{L(t)}_{\text{external inputs}} + r \frac{P^q(t)}{m^q + P^q(t)} \quad \text{recycling from sediments}$$



How to decentralize Controls?
How to deal with empty viability kernel?



Means of action: $u_{min} \leq \frac{dL}{dt} \leq u_{max}$

Viability Theory: a framework for modelling sustainability

Sustainable: definition from the Bruntland report (1987)

which meets the needs of the present without compromising the ability of future generations to meet their own needs

Mathematical Viability theory (Aubin, 1991; Aubin et al, 2011): Studies the compatibility between a dynamical system and constraints in the state space

Avoid trade-off:

- Between short term and long term considerations
- Between different features of sustainability

Approximation algorithms with proved convergence (Saint-Pierre, 1994)

Many applications in various field, in particular for the management of natural resources (More than 80 examples in this field in Oubraham, A. and Zaccour, G., 2018)

Aubin J.-P, *Viability Theory*, Birkhauser, 1991

Aubin, J.-P., Bayen, A., & Saint-Pierre, P., *Viability Theory: New Directions*, Springer, 2011

Oubraham, A. and Zaccour, G. (2018). A Survey of Applications of Viability Theory to the Sustainable Exploitation of Renewable Resources. *Ecological Economics*, 145:346–367